Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON W. SÜSS

65. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 15. AUGUST 1956)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1956

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hierzu unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

65. Band **Inhalt** 4. Heft

Seite

Avakumović, V. G., Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten 327
Foulkes, H. O., Theorems of Kakeya and Pólya on power-sums 345
Zaddach, A., Über Anti-Fano-Ebenen 353
Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. V 389
Morita, K., and H. Tachikawa, Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings 414
Schöneborn, H., Über den Zusammenhang zwischen Dualitäts- und Vollständigkeitseigenschaften bei gewissen topologischen Abelschen Gruppen 429
Ramanujan, M. S., Theorems on the product of quasi-Hausdorff and Abel transforms 442
Bauer, H., Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße 448
Sonner, H., Über die Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche 483
Petersen, G. M., Inclusion between limitation methods 494

Avakumović, V. G.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 327—344 (1956)

Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Von
Vojislav G. Avakumović

1. Einleitung. *1.1.* Sei D ein beschränktes Gebiet des N-dimensionalen Euklidischen Raumes. Der Rand $\overline{D}$ von D sei stückweise glatt. P bezeichne Punkte aus D und λ_n bzw. $\Phi_n(P)$ die Eigenwerte bzw. die auf D orthonormierten Eigenfunktionen von $(\Delta+\lambda)u=0$ innerhalb D und $u=0$ längs $\overline{D}$.

Bezüglich λ_n und $\Phi_n(P)$ gelten folgende zwei fundamentale asymptotische Formeln:

$$\sum_{\lambda_n \leq x} 1 = F C_N x^{N/2} + o(x^{N/2}) \tag{1.1}$$

und

$$\sum_{\lambda_n \leq x} \Phi_n^2(P) = C_N x^{N/2} + o(x^{N/2}). \tag{1.2}$$

Dabei ist $C_N = 1/(2\sqrt{\pi})^N \Gamma(N/2+1)$ und F bezeichnet den Rauminhalt von D. Die erste dieser Formeln wurde von Herrn Weyl [14] im Jahre 1911 und die zweite von Herrn Carleman [4] im Jahre 1934 bewiesen.

Herr Courant [5] hat in (1.1) das $o\left(x^{\frac{N}{2}}\right)$ bis auf $O\left(x^{\frac{N-1}{2}} \lg x\right)$ herabgedrückt; der Verf. [2] und unabhängig davon Herr Levitan [9a] haben gezeigt, daß in (1.2) das $o\left(x^{\frac{N}{2}}\right)$ bis auf $O\left(x^{\frac{N-1}{2}}\right)$ verschärft werden kann (welches Ergebnis bestmöglich ist).

Schließlich haben die Herren Minakshisundaram und Pleijel [10] die Formeln (1.1) und (1.2) auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen.

1.2. Sei V eine geschlossene, zusammenhängende, kompakte und beliebig oft differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit[1]). $P, Q, \Pi, \ldots, X, Y$ bezeichnen Punkte aus V, x^i $(i=1, 2, \ldots, N)$ die lokalen Koordinaten und $g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^N)$ die Komponenten des metrischen Tensors. Ferner bezeichne Δ den Beltramischen Operator

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

wobei $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$ und $g = \det(g_{ij})$ ist.

[1]) Aus dem Folgenden (insbesondere dem Beweis des Hilfssatzes 1) ist ersichtlich, daß die Voraussetzung „V ist kompakt und beliebig oft differenzierbar" durch die allgemeinere „$V \in C^r$" ersetzt werden kann. Dabei ist, wie üblich, „$V \in C^r$" folgendermaßen erklärt: 1. V ist eine kompakte Mannigfaltigkeit. 2. Sind x^i und x'^i zwei Lokalkoordinatensysteme irgendeines Punktes aus V, so haben $x^i(x'^j)$ und $x'^i(x^j)$ stetige partielle Ableitungen r-ter Ordnung. 3. Die Komponenten g^{ik} der eingeprägten Metrik haben in bezug auf Lokalkoordinaten stetige partielle Ableitungen der Ordnung $r-1$.

Da V geschlossen ist so hat, wie bekannt, die Aufgabe $(\Delta + \lambda) u = 0$ dann und nur dann auf V reguläre Lösungen, wenn λ gleich einem der Eigenwerte

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

ist. Dabei ist $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_n \leqq \lambda_{n+1} \to \infty$; jedem λ_n entspricht eine und nur eine orthonormierte Eigenfunktion. Diese seien mit

$$\Phi_0(P), \Phi_1(P), \Phi_2(P), \ldots$$

bezeichnet. Dabei ist $\Phi_0(P) = 1/\sqrt{F}$ mit F = Rauminhalt von V.

Nach MINAKSHISUNDARAM und PLEIJEL gelten, wie schon erwähnt, folgende Formeln:

$$\sum_{\lambda_n \leqq x} 1 = F C_N x^{N/2} + o(x^{N/2})$$

und, falls

$$\Theta(P; x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} \Phi_n^2(P)$$

gesetzt wird,

$$\Theta(P; x) = C_N x^{\frac{N}{2}} + o\left(x^{\frac{N}{2}}\right).$$

In der vorliegenden Arbeit werde ich zeigen, daß die in 1.1 erwähnten Verschärfungen auch auf V gelten und daß die COURANTsche Abschätzung sogar noch verschärft werden kann. Um dabei das Wesentliche hervortreten zu lassen und technische Schwierigkeiten zu vermeiden, beschränke ich mich auf den Fall $N = 3$[2]).

1.3. Satz 1. *Es mögen V und $\Theta(P; x)$ dieselbe Bedeutung wie in 1.2 haben und es sei $N = 3$. Dann gilt*

(I) $$\Theta(P; x) = \frac{1}{6\pi^2} x^3 + O(x),$$

und zwar gleichmäßig in bezug auf P.

Wird $\Theta(P; x)$ über V integriert, so folgt aus (I) der

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gilt*

(II) $$\sum_{\lambda_n \leqq x} 1 = \frac{F}{6\pi^2} x^3 + O(x).$$

Dabei hat F dieselbe Bedeutung wie in 1.2.

Der hier gegebene Beweis von (I) mit einem von P unabhängigen $O(x)$-Glied beruht wesentlich auf der Voraussetzung, daß V unberandet ist.

Schließlich werde ich am Beispiel der dreidimensionalen Kugelfläche zeigen, daß die gewonnenen Ergebnisse nicht verbessert werden können. Es gilt also der

Satz 3. *Die $O(x)$-Abschätzungen in* (I) *und* (II) *sind bestmöglich.*

---

[2]) Im Falle $N \neq 3$ ist es zweckmäßig anstatt der Schwingungsgleichung die Wärmeleitungsgleichung $\left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0$ zu verwenden und folglich mit $\sum \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)\, e^{-\lambda_n t}$ anstatt mit $\sum \Phi_n(P)\, \Phi_n(Q)/\lambda_n^{2[N/4]+1} (\lambda_n + \lambda)$ zu arbeiten.

1.4. Im folgenden bezeichnen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ feste, nur von V abhängige Zahlen.

Die Zahl R ist folgendermaßen erklärt: Da V geschlossen und kompakt ist, gibt es eine von P unabhängige feste Zahl $R>0$, derart, daß die geodätische Kugel um P vom Durchmesser R ganz im Existenzbereich jedes Normalkoordinatensystems mit Zentrum P liegt.

Den Satz 1 werde ich aus folgendem Satz herleiten.

Satz A. *Es gibt zwei Funktionen* $R(P;x)$ *und* $w(P)$ *mit*

$$|R(P;x)| \leq m_1 \quad \text{und} \quad |w(P)| \leq m_2 \tag{1.3}$$

und eine von P *unabhängige feste Zahl* ϱ_0 *mit* $0<2\varrho_0 \leq R$, *so daß folgendes gilt: Wird*

$$A(P;x) = \sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n} - \frac{\sqrt{x}}{2\pi^2} - w(P) + R(P;x)$$

gesetzt, so konvergiert

$$\varphi(P;s) = \int_0^\infty e^{-sv} A(P;v^2)\, dv$$

für $\Re(s)>0$[3]) *und ist daselbst einschließlich* $|s|<\frac{\varrho_0}{2}$ *eine reguläre analytische Funktion und genügt für* $|s| \leq \frac{\varrho_0}{3}$ *der Ungleichung*

$$|\varphi(P;s)| \leq m_3. \tag{1.4}$$

1.5. Wegen (1.3) und

$$A(P;y^2) - A(P;x^2) = \sum_{x^2<\lambda_n\leq y^2} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n} - \frac{1}{2\pi^2}(y-x) + \left(R(P;y^2) - R(P;x^2)\right)$$

ist

$$A(P;y^2) - A(P;x^2) \geq -m_5 \quad \text{für } x \leq y \leq x+1. \tag{1.5}$$

Aus dem regulären Verhalten von $\varphi(P;s)$ im Punkte $s=0$ und der Ungleichung (1.5) ergibt sich auf bekannte Weise (Verallgemeinerung des FATOU-RIESzschen O-Satzes; vgl. [8] und [9] sowie den Beweis in *1.6*)

$$A(P;x) = O(1) \quad (x \to \infty). \tag{1.6}$$

Wegen (1.4) und (1.5) gilt (1.6) gleichmäßig in bezug auf P, so daß wegen (1.3)

$$\left| \sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n} - \frac{\sqrt{x}}{2\pi^2} \right| \leq m_6 \tag{1.7}$$

ist. Setzen wir

$$\Theta_1(P;x) = \sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n},$$

so ist

$$\Theta(P;x) = \int_0^x t\, d\{\Theta_1(P;t)\} = x\,\Theta_1(P;x) - \int_0^x \Theta_1(P;t)\, dt,$$

woraus sich auf Grund von (1.7) die Beziehung (I) ergibt.

[3]) $\Re(s)$ bezeichnet den reellen Teil von S.

1.6. Der Vollständigkeit wegen wollen wir (1.6) kurz beweisen. Dabei stütze ich mich auf die in 4.1 zu beweisende Formel $A(P;x)=O\left(\sqrt{x}\right)$, $x\to\infty$.

a) Wir setzen (vgl. [8] und [9])

$$p(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}-4x^2+4x^3 & \text{für } 0\leq x\leq\frac{1}{2},\\ \frac{4}{3}(1-x)^3 & \text{für } \frac{1}{2}\leq x\leq 1,\\ 0 & \text{für } x\geq 1,\end{cases}$$

so daß

$$\int_{-\frac{\varrho_0}{3}}^{+\frac{\varrho_0}{3}} e^{iyt}\,p\left(\frac{3|t|}{\varrho_0}\right)dt=\frac{\varrho_0}{6}\left(\frac{\sin\varrho_0 y/12}{\varrho_0 y/12}\right)^4$$

ist. Mit $\varepsilon>0$ bilden wir

$$H_\varepsilon(P;y)=\int_{-\frac{\varrho_0}{3}}^{+\frac{\varrho_0}{3}} e^{iyt}\,p\left(\frac{3|t|}{\varrho_0}\right)\varphi(P;\varepsilon+it)\,dt.$$

Da $\varphi(P;\varepsilon+it)$ für $\varepsilon>0$ als LAPLACE-Integral darstellbar ist, so ist (Satz von FUBINI)

$$H_\varepsilon(P;y)=\int_0^\infty e^{-\varepsilon v}A(P;v^2)\,dv\int_{-\frac{\varrho_0}{3}}^{+\frac{\varrho_0}{3}} e^{i(y-v)t}\,p\left(\frac{3|t|}{\varrho_0}\right)dt \tag{1.8}$$

$$=\frac{\varrho_0}{6}\int_0^\infty e^{-\varepsilon v}A(P;v^2)\left(\frac{\sin\varrho_0(y-v)/12}{\varrho_0(y-v)/12}\right)^4 dv.$$

b) Da $\varphi(P;s)$ für $|s|\leq\frac{\varrho_0}{3}$ regulär ist, existiert

$$H(P;y)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon(P;y)$$

und ist

$$=\int_{-\frac{\varrho_0}{3}}^{+\frac{\varrho_0}{3}} e^{iyt}\,p\left(\frac{3|t|}{\varrho_0}\right)\varphi(P;it)\,dt.$$

Wegen (1.4) und $|p(x)|\leq\frac{2}{3}$ ist also

$$|H(P;y)|\leq\tfrac{4}{9}\varrho_0 m_3. \tag{1.9}$$

c) Wegen $A(P;x)=O\left(\sqrt{x}\right)$ kann man im rechtsstehenden Integral (1.8) den Grenzübergang $\varepsilon\to 0$ vor und hinter dem Integralzeichen vertauschen, so daß

$$H(P;y)=\frac{\varrho_0}{6}\int_0^\infty A(P;v^2)\left(\frac{\sin\varrho_0(y-v)/12}{\varrho_0(y-v)/12}\right)^4 dv \tag{1.10}$$

wird.

d) Aus (1.5), (1.9) und (1.10) folgt auf bekannte und elementare Weise $A(P; x) = O(1)$ für $x \to \infty$ (vgl. G. H. HARDY, Divergent Series, S. 305), und zwar [wegen (1.5) und (1.9)] gleichmäßig in bezug auf P.

2. Die Parametrix. *2.1.* Nach MINAKSHISUNDARAM und PLEIJEL [*10*] kann man eine Parametrix von

$$(\Delta - \lambda)\, u = 0 \tag{2.1}$$

wie folgt konstruieren: Der metrische Tensor sei o.B.d.A. auf Normalkoordinaten bezogen und $r = r_{PQ}$ bezeichne die geodätische Entfernung der Punkte P und Q. Dann gilt für jede nur von r abhängige Funktion $\Phi(r)$ und jede Funktion u die Formel

$$\Delta \Phi u = u\left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{d(\lg\sqrt{g})}{dr}\frac{d\Phi}{dr}\right) + 2\frac{du}{dr}\frac{d\Phi}{dr} + \Phi\,\Delta u. \tag{2.2}$$

Wird $u_\nu = u_\nu(P, Q)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ mittels

$$r\frac{du_\nu}{dr} + \frac{r}{2}\frac{d(\lg\sqrt{g})}{dr}u_\nu + \nu\, u_\nu = \Delta u_{\nu-1};\ u_0(P, P) = 1,\ u_{-1} \equiv 0 \tag{2.3}$$

definiert und

$$K_m(P, Q; -\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(P, Q)\, k_\nu(P, Q; -\lambda)$$

mit

$$k_\nu(P, Q; -\lambda) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\int_0^\infty e^{-\lambda t - \frac{r^2}{4t}} t^{\nu - \frac{3}{2}}\, dt$$

gesetzt, so ist wegen (2.2)

$$(\Delta - \lambda)\, K_m(P, Q; -\lambda) = k_m(P, Q; -\lambda)\, \Delta u_m(P, Q). \tag{2.4}$$

Da $K_m(P, Q; -\lambda)$ für $m \geqq 0$ dieselbe Singularität wie die GREENsche Funktion von (2.1) besitzt, ist $K_m(P, Q; -\lambda)$ eine lokale Parametrix von (2.1).

Für jedes $\varrho > 0$ gibt es ein viermal stetig differenzierbares $\eta = \eta(r)$, so daß

$$\eta(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq r \leqq \varrho \\ 0 & \text{für } r \geqq 2\varrho \end{cases}$$

und

$$|\eta(r)| \leqq 1,\ \left|\frac{d\eta(r)}{dr}\right| \leqq \frac{\text{const}}{r} \quad \text{und} \quad \left|\frac{d^2\eta(r)}{dr^2}\right| \leqq \frac{\text{const}}{r^2}. \tag{2.5}$$

Für jedes feste $0 < 2\varrho \leqq R$ und $m \geqq 0$ ist

$$\Gamma_m(P, Q; -\lambda) = \eta(r_{PQ})\, K_m(P, Q; -\lambda)$$

eine auf $V \times V$ erklärte Parametrix im großen.

2.2. Auf Grund von (2.2) und (2.4) ist

$$(2.6)\quad \begin{cases} \Omega_m(P,Q;-\lambda) = (\Delta-\lambda)\,\Gamma_m(P,Q;-\lambda) \\ \qquad = k_m(P,Q;-\lambda)\,\Delta u_m(P,Q) & \text{für } 0\leq r\leq \varrho, \\ \qquad = \left\{\frac{d^2\eta}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\eta}{dr}+\frac{d(\lg\sqrt{g})}{dr}\frac{d\eta}{dr}\right\}K_m(P,Q;-\lambda)+ \\ \quad +2\frac{d\eta}{dr}\frac{dK_m(P,Q;-\lambda)}{dr}+\eta\,k_m(P,Q;-\lambda)\,\Delta u_m(PQ) & \text{für } \varrho\leq r\leq 2\varrho \end{cases}$$

und

$$= 0 \qquad \text{für } r\geq 2\varrho.$$

Diese Formeln werden im folgenden nur für $m=0$ und $m=1$ benutzt.

3. Hilfssätze. *3.1.* Bekanntlich ([*13*], S. 183) ist

$$(3.1)\quad k_0(P,Q;-\lambda)=\frac{1}{4\pi r}e^{-r\sqrt{\lambda}} \quad \text{und} \quad \frac{dk_1(P,Q;-\lambda)}{dr}=-\frac{1}{8\pi}e^{-r\sqrt{\lambda}}.$$

Wegen (2.5), (2.6) und der für $r_{PQ}\leq R$ gültigen Ungleichungen

$$(3.2)\qquad |u_m(P,Q)| \quad \text{bzw.} \quad |\Delta u_m(P,Q)|\leq m_7 \qquad \text{für } m=0,1$$

ist also

$$|\Omega_0(P,Q;-\lambda)|\leq\frac{m_8}{r}e^{-r\sqrt{\lambda}} \qquad \text{für } 0\leq r\leq\varrho$$

und

$$|\Omega_0(P,Q;-\lambda)|\leq\frac{m_8}{r^3}e^{-\frac{r}{2}\sqrt{\lambda}} \qquad \text{für } \varrho\leq r\leq 2\varrho.$$

Folglich ist

$$(3.3)\qquad |\Omega_0(P,Q;-\lambda)|\leq\frac{m_9}{\varrho^2 r}e^{-\frac{r}{2}\sqrt{\lambda}} \quad \textit{und} \quad |\Gamma_0(P,Q;-\lambda)|\leq\frac{m_9}{r}e^{-r\sqrt{\lambda}}$$
$$\textit{für } 0\leq r\leq 2\varrho.$$

Ferner gilt:

$$(3.4)\qquad \Omega_1(P,Q;-\lambda) \quad \textit{und} \quad \frac{\partial}{\partial x^k}(\Omega_1(P,Q;-\lambda) \quad \textit{sind stetig auf} \quad V\times V.$$

Dabei ist entweder $(x^1,x^2,x^3)=P$ oder $=Q$. Die Behauptung (3.4) ist eine unmittelbare Folge der Formeln (2.6) und (3.1) sowie der Tatsache, daß $\frac{\partial}{\partial x^k}\Delta u_1(P,Q)$ auf $r_{PQ}\leq R$ stetig[4]) und $\eta(r)$ viermal stetig differenzierbar ist.

3.2. Ich beweise zunächst folgenden

Hilfssatz 1. *Es bezeichne $G(P,Q;-\lambda)$ die* GREENsche *Funktion von $(\Delta-\lambda)u=0$, und $\Gamma_0(P,Q;-\lambda)$ und $\Omega_0(P,Q;-\lambda)$ seien die in 2.1 bzw. 2.2 erklärten Funktionen. Dann hat die Integralgleichung*

$$(3.5)\quad \gamma(P)=\int_V \Gamma_0(\Pi,Q;-\lambda)\,\Omega_0(P,\Pi;-\lambda)\,dV_\Pi+\int_V\gamma(\Pi)\,\Omega_0(P,\Pi;-\lambda)\,dV_\Pi$$

[4]) Loc. cit.[1]).

für genügend große λ eine und nur eine Lösung, und es ist[5])

$$\gamma(P) = \gamma_0(P, Q; -\lambda) = \Gamma_0(P, Q; -\lambda) - G(P, Q; -\lambda).$$

Beweis. a) Es werde

$$\gamma_1(P, Q; -\lambda) = \Gamma_1(P, Q; -\lambda) - G(P, Q; -\lambda)$$

gesetzt, so daß wegen $(\Delta - \lambda) G = 0$

$$(\Delta - \lambda)\, \gamma_1(P, Q; -\lambda) = \Omega_1(P, Q; -\lambda)$$

ist. Wegen (3.4) ist auf Grund klassischer Sätze

$$\gamma_1(P, Q; -\lambda) = -\int_V G(P, \Pi; -\lambda)\, \Omega_1(\Pi, Q; -\lambda)\, dV_\Pi$$

und somit

$$\frac{\partial \gamma_1(P, Q; -\lambda)}{\partial x^k} = -\int_V G(P, \Pi; -\lambda)\, \frac{\partial}{\partial x^k}\, (\Omega_1(\Pi, Q; -\lambda)\, dV_\Pi$$

mit $(x^1, x^2, x^3) = Q$. Also:

(3.6) $\quad g^{ik}(Q)\, \dfrac{\partial \gamma_1(P, Q; -\lambda)}{\partial x^k}$ ist stetig auf $V \times V$.

Es werde

$$\gamma_0(P, Q; -\lambda) = \gamma_1(P, Q; -\lambda) - \eta(r_{PQ})\, u_1(P, Q)\, k_1(P, Q; -\lambda)$$

gesetzt. Wegen (3.6) und der zweiten Formel (3.1) ergibt sich:

(3.7) $\quad g^{ik}(Q)\, \dfrac{\partial \gamma_0(P, Q; -\lambda)}{\partial x^k}$ ist stetig auf $V \times V$.

Auf Grund der Definition von $\Gamma_m(P, Q; -\lambda)$ und $\gamma_1(P, Q; -\lambda)$ ist

$$\gamma_0(P, Q; -\lambda) = \Gamma_0(P, Q; -\lambda) - G(P, Q; -\lambda)$$

und somit

(3.8) $\quad (\Delta - \lambda)\, \gamma_0(P, Q; -\lambda) = \Omega_0(P, Q; -\lambda).$

b) Es bezeichne $\varkappa_Q^\varepsilon$ die geodätische Kugel um Q vom Durchmesser ε und $\overline{\varkappa}_Q^\varepsilon$ sei der Rand von $\varkappa_Q^\varepsilon$. Dann ist (Formel von GREEN)

$$\int_{V - \varkappa_Q^\varepsilon} \{\gamma_0(P, \Pi; -\lambda)\, (\Delta - \lambda)_\Pi\, G(\Pi, Q; -\lambda) - G(\Pi, Q; -\lambda)\, (\Delta - \lambda)_\Pi \gamma_0(P, \Pi; -\lambda)\}\, dV_\Pi$$

$$= \int_{\overline{\varkappa}_Q^\varepsilon} \left\{\gamma_0(P, \Pi; -\lambda)\, g^{ik}(\Pi)\, \frac{\partial G(\Pi, Q; -\lambda)}{\partial \xi^k} - G(\Pi, Q; -\lambda)\, g^{ik}(\Pi)\, \frac{\partial \gamma_0(P, \Pi; -\lambda)}{\partial \xi^k}\right\} \frac{\partial \xi^i}{\partial \nu}\, dF_\Pi.$$

[5]) Auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung und der Formel (4.2) läßt sich zeigen, daß (3.5) in der ganzen, längs der reellen negativen Achse aufgeschnittenen, komplexen λ-Ebene eine und nur eine Lösung hat. Diese Tatsache wird aber im folgenden nicht benutzt.

Dabei ist: $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \Pi$, $dF_\Pi = \sqrt{g}\, dO$ mit $dO =$ Flächenelement von $\bar{x}_Q^\varepsilon$ und $\frac{\partial \xi^i}{\partial \nu}$ sind die Richtungskosinus der Flächennormalen auf $\bar{x}_Q^\varepsilon$. Wegen (3.7) und (3.8) erhält man daraus nach Vollziehung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$ die Darstellung

$$(3.9)\qquad \begin{cases} \gamma_0(P, Q; -\lambda) = -\int\limits_V G(\Pi, Q; -\lambda)\, \Omega_0(P, \Pi; -\lambda)\, dV_\Pi \\ \qquad\qquad = -\int\limits_V \Gamma_0(\Pi, Q; -\lambda)\, \Omega_0(P, \Pi; -\lambda)\, dV_\Pi + \\ \qquad\qquad + \int\limits_V \gamma_0(\Pi, Q; -\lambda)\, \Omega_0(P, \Pi; -\lambda)\, dV_\Pi . \end{cases}$$

c) Wegen (3.9) hat (3.5) mindestens eine Lösung nämlich $\gamma(P) = \gamma_0(P, Q; -\lambda)$. Daß für genügend große λ die Integralgleichung (3.5) außer $\gamma(P) = \gamma_0(P, Q; -\lambda)$ keine andere Lösung hat, sieht man folgendermaßen ein: Gäbe es zwei verschiedene Lösungen $v_1(\Pi)$ und $v_2(\Pi)$ von (3.5), so wäre

$$v_1(P) - v_2(P) = \int\limits_V \{v_1(\Pi) - v_2(\Pi)\}\, \Omega_0(P, \Pi; -\lambda)\, dV_\Pi .$$

Sei $\operatorname{Max} |v_1(P) - v_2(P)| = |v_1(P^*) - v_2(P^*)|$. Dann ist

$$|v_1(P^*) - v_2(P^*)| \leq |v_1(P^*) - v_2(P^*)| \int\limits_V |\Omega_0(P^*, \Pi; -\lambda)|\, dV_\Pi ,$$

also

$$\int\limits_V |\Omega_0(P^*, \Pi; -\lambda)|\, dV_\Pi \geqq 1 .$$

Dies steht aber im Widerspruch mit der in 3.3 zu beweisenden Ungleichung (3.14), wonach $\int\limits_V |\Omega_0(P, \Pi; -\lambda)|\, dV_\Pi$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur λ genügend groß gewählt wird.

3.3. Hilfssatz 2. *Es habe $\gamma_0(P, Q; -\lambda)$ dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 1. Dann gibt es ein auf $V \times V$ erklärtes $R(P, Q; x)$ mit*

$$(3.10)\qquad |R(P, Q; x)| \leq m_1$$

und ein von P und Q unabhängiges $0 < 4\varrho_0 \leq R$, derart daß

$$\gamma_0(P, Q; -\lambda) = -\lambda \int\limits_0^\infty \frac{R(P, Q; x)}{(\lambda + x)^2}\, dx + O\left(e^{-\frac{\varrho_0}{2}\sqrt{\lambda}}\right), \qquad \lambda \to \infty$$

gleichmäßig in bezug auf $V \times V$ gilt.

Für $n = 1, 2, \ldots$ werde

$$\chi_n(P, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, Q; -\lambda) = \Omega_0(P, \Pi_1; -\lambda)\, \Omega_0(\Pi_1, \Pi_2; -\lambda) \ldots \\ \ldots \Omega_0(\Pi_{n-1}, \Pi_n; -\lambda)\, \Gamma_0(\Pi_n, Q; -\lambda)$$

und

$$a_n(P, Q; -\lambda) = \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_V \chi_n(P, \Pi_1, \ldots, \Pi_n, Q; -\lambda)\, dV_{\Pi_1} dV_{\Pi_2} \ldots dV_{\Pi_n}$$

gesetzt. Dann ist $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(P, Q; -\lambda)$ die NEUMANNsche Reihe von (3.5).

Auf Grund des Hilfssatzes 1 ist für genügend große λ

$$\gamma_0(P, Q; -\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(P, Q; -\lambda), \tag{3.11}$$

falls die rechtsstehende Reihe konvergiert. Ich beweise nicht nur, daß die erwähnte Reihe konvergiert, sondern ich beweise zugleich:

I. *Für jedes* ϱ *mit* $0 < 2\varrho \leq R$ *und jedes* $\lambda\varrho^2 \geq 1$ *gibt es ein* $r_n(P, Q; x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *mit*

$$|r_n(P, Q; x)| \leq (m_{10}\varrho^2)^{n-\frac{1}{2}}, \tag{3.12}$$

so daß

$$\left| a_n(P, Q; -\lambda) - \lambda \int_0^{\infty} \frac{r_n(P, Q; x)}{(\lambda + x)^2}\, dx \right| \leq \frac{1}{\varrho^3} \left(\frac{m_{11}}{\varrho^2 \lambda}\right)^{n-1} e^{-\frac{r}{4}\sqrt{\lambda}} \tag{3.13}$$

ist.

Damit ist auch Hilfssatz 2 bewiesen. Denn wird

$$R(P, Q; x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(P, Q; x)$$

und $m_{12} = \operatorname{Max}\{m_{10}, m_{11}\}$ gesetzt und werden die festen Zahlen $\varrho = 4\varrho_0$ und λ^* so gewählt, daß

$$4 m_{12} \varrho_0^2 \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{m_{12}}{4\varrho_0^2 \lambda^*} \leq \frac{1}{2}$$

ist, so erhält man auf Grund von (3.12)

$$|R(P, Q; x)| \leq \sqrt{2}$$

und auf Grund von (3.11) und (3.13)

$$\left| \gamma_0(P, Q; -\lambda) + \lambda \int_0^{\infty} \frac{R(P, Q; x)}{(\lambda + x)^2}\, dx \right| \leq \frac{2}{\varrho_0^3} e^{-\frac{\varrho_0}{2}\sqrt{\lambda}},$$

wenn nur λ so groß gewählt wird, daß (3.11) gilt und zugleich $\lambda \geq \operatorname{Max}\left\{\lambda^*, \frac{1}{\varrho_0^2}\right\}$ ist.

Beweis von I. a) Es bezeichne $\varkappa_X^\tau$ die geodätische Kugel um X vom Durchmesser $0 < \tau \leq R$ und ξ^1, ξ^2, ξ^3 sei ein Normalkoordinatensystem mit Zentrum X. Drücken wir die Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 durch Polarkoordinaten r, α^1, α^2 aus, so daß $\xi^i = \Theta^i(\alpha^1, \alpha^2) r$, so ist die Transformationsdeterminante von der Gestalt $r^2 \Psi(\Theta)$, und innerhalb $\varkappa_X^\tau$ gilt $|\Psi(\Theta)| \leq m_{13}$. Wegen (3.3) ist also

$$\begin{aligned} \int_V |\Omega_0(X, \Pi; -\lambda)|\, dV_\Pi &\leq \frac{m_9}{\varrho^2} \int_{\varkappa_X^{2\varrho}} e^{-r_{X\Pi}\sqrt{\lambda}/2} \frac{dV_\Pi}{r_{X\Pi}} \leq \\ &\leq \frac{m_{14}}{\varrho^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\alpha^1 d\alpha^2 \int_0^{2\varrho} e^{-\frac{r}{2}\sqrt{\lambda}} r\, dr \leq \frac{m_{15}}{\varrho^2 \lambda}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ebenso sieht man, daß

$$(3.15)\qquad \int_V |\Omega_0(X,\Pi;-\lambda)|^2\,dV_\Pi \leqq \frac{m_{16}}{\varrho^4\sqrt{\lambda}} \quad \text{und} \quad \int_V |\Gamma_0(\Pi,Y;-\lambda)|^2\,dV_\Pi \leqq \frac{m_{17}}{\sqrt{\lambda}}$$

ist. Infolgedessen ist (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung)

$$(3.16)\qquad \int_V |\Omega_0(X,\Pi;-\lambda)\,\Gamma_0(\Pi,Y;-\lambda)|\,dV_\Pi \leqq \frac{m_{18}}{\varrho^2\sqrt{\lambda}}.$$

Wegen (3.3) ist schließlich

$$(3.17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{V-\varkappa_X^\varrho} |\Omega_0(X,\Pi;-\lambda)|\,dV_\Pi \leqq \frac{m_9}{\varrho^2}\,e^{-\frac{\varrho}{2}\sqrt{\lambda}} \int_{V-\varkappa_X^\varrho} \frac{dV_\Pi}{r_{X\Pi}} \leqq \frac{m_{19}}{\varrho^2}\,e^{-\frac{\varrho}{2}\sqrt{\lambda}} \leqq \\ \qquad\qquad \leqq \dfrac{1}{\varrho^3}\,\dfrac{m_{20}}{\sqrt{\lambda}}\,e^{-\frac{\varrho}{4}\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

und

$$\int_{V-\varkappa_X^\varrho} |\Omega_0(X,\Pi;-\lambda)|^2\,dV_\Pi \leqq \frac{m_{21}}{\varrho^4}\,e^{-\varrho\sqrt{\lambda}}$$

und somit wegen (3.15)

$$(3.18)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{V-\varkappa_X^\varrho} |\Omega_0(X,\Pi;-\lambda)\,\Gamma_0(\Pi,Y;-\lambda)|\,dV_\Pi \leqq \\ \qquad \leqq \left\{ \displaystyle\int_{V-\varkappa_X^\varrho} |\Omega_0(X,\Pi;-\lambda)|^2\,dV_\Pi \int_V |\Gamma_0(\Pi,Y;-\lambda)|^2\,dV_\Pi \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \\ \qquad \leqq \dfrac{m_{22}}{\varrho^2\sqrt[4]{\lambda}}\,e^{-\frac{\varrho}{2}\sqrt{\lambda}} \leqq \dfrac{1}{\varrho^3}\,\dfrac{m_{23}}{\varrho^2\lambda}\,e^{-\frac{\varrho}{4}\sqrt{\lambda}}. \end{cases}$$

b) Auf dieselbe Weise sieht man, daß

$$(3.19)\qquad \int_{\varkappa_X^\varrho} \frac{dV_\Pi}{r_{X\Pi}} \leqq m_{24}\varrho^2, \qquad \int_{\varkappa_X^\varrho} \frac{|\eta(r_{\Pi Y})|}{r_{X\Pi}\,r_{\Pi Y}}\,dV_\Pi \leqq m_{24}\varrho$$

ist.

c) Es ist

$$(3.20)\qquad \begin{cases} a_n(P,Q;-\lambda) = \left(\displaystyle\int_{V-\varkappa_P^\varrho} + \int_{\varkappa_P^\varrho}\right)\left(\int_{V-\varkappa_{\Pi_1}^\varrho} + \int_{\varkappa_{\Pi_1}^\varrho}\right)\cdots\left(\int_{V-\varkappa_{\Pi_{n-1}}^\varrho} + \int_{\varkappa_{\Pi_{n-1}}^\varrho}\right)\chi_n\,dV_{\Pi_1}\ldots dV_{\Pi_n} \\ \qquad = \displaystyle\int_{V-\varkappa_P^\varrho} \overbrace{\left(\int\cdots\int\right)}^{n=1} + \cdots \qquad \cdots + \int_{\varkappa_P^\varrho}\int_{\varkappa_{\Pi_1}^\varrho}\cdots\int_{\varkappa_{\Pi_{n-1}}^\varrho}. \end{cases}$$

Jeder Summand rechterhand außer dem letzten enthält mindestens ein über $V-\varkappa_{\Pi_i}^\varrho$ $(i=0,1,\ldots,n-1$ mit $\Pi_0=P)$ erstrecktes Integral. Folglich

läßt sich jeder dieser Summanden mittels

$$\int_V |\Omega_0(\Pi_0, \Pi_1; -\lambda)|\, dV_{\Pi_1} \dots$$
$$\dots \int_V |\Omega_0(\Pi_{i-1}, \Pi_i; -\lambda)\, dV_{\Pi_i} \int_{V-\varkappa^\varrho_{\Pi_i}} |\Omega_0(\Pi_i, \Pi_{i+1}; -\lambda)|\, dV_{\Pi_{i+1}} \times$$
$$\times \int_V |\Omega_0(\Pi_{i+1}, \Pi_{i+2}; -\lambda)|\, dV_{\Pi_{i+2}} \dots \int_V |\Omega_0(\Pi_{n-1}, \Pi_n; -\lambda)\, \Gamma_0(\Pi_n, Q; -\lambda)|\, dV_{\Pi_n}$$

bzw.

$$\int_V |\Omega_0(\Pi_0, \Pi_1; -\lambda)|\, dV_{\Pi_1} \dots$$
$$\dots \int_V |\Omega_0(\Pi_{n-2}, \Pi_{n-1}; -\lambda)\, dV_{\Pi_{n-1}} \int_{V-\varkappa^\varrho_{\Pi_{n-1}}} |\Omega_0(\Pi_{n-1}, \Pi_n; -\lambda)\, \Gamma_0(\Pi_n, Q; -\lambda)|\, dV_{\Pi_n}$$

majorieren, je nachdem ob $0 \leq i \leq n-2$ oder $i = n-1$ ist.

Im ersten Falle ist, wegen (3.14), (3.16) und (3.17), dieser Ausdruck nicht größer als

$$\left(\frac{m_{15}}{\varrho^2 \lambda}\right)^{n-2} \frac{1}{\varrho^3} \frac{m_{20}}{\sqrt{\lambda}}\, e^{-\frac{\varrho}{4}\sqrt{\lambda}}\, \frac{m_{18}}{\varrho^2 \sqrt{\lambda}},$$

und im zweiten, wegen (3.14) und (3.18), nicht größer als

$$\left(\frac{m^{15}}{\varrho^2 \lambda}\right)^{n-1} \frac{1}{\varrho^3} \frac{m_{23}}{\varrho^2 \lambda}\, e^{-\frac{\varrho}{4}\sqrt{\lambda}}.$$

Wegen $\varrho^2 \lambda \geq 1$ gibt es also ein m_{25} derart, daß der betrachtete Ausdruck nicht größer als

$$\frac{1}{\varrho^3} \left(\frac{m_{25}}{\varrho^2 \lambda}\right)^{n-1} e^{-\frac{\varrho}{2}\sqrt{\lambda}}$$

ist. Da es in (3.20) derartiger Ausdrücke insgesamt $2^n - 1$ gibt, so ist

$$(3.21) \quad \left| a_n(P, Q; -\lambda) - \int_{\varkappa^\varrho_P} \int_{\varkappa^\varrho_{\Pi_1}} \cdots \int_{\varkappa^\varrho_{\Pi_{n-1}}} \chi_n\, dV_{\Pi_1} \dots dV_{\Pi_n} \right| \leq \frac{2}{\varrho^3} \left(\frac{2 m_{25}}{\varrho^2 \lambda}\right)^{n-1} e^{-\frac{\varrho}{4}\sqrt{\lambda}} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varrho^3} \left(\frac{m_{11}}{\varrho^2 \lambda}\right)^{n-1} e^{-\frac{\varrho}{4}\sqrt{\lambda}}.$$

d) Es werde

$$\chi_n(P, \Pi_1, \dots, \Pi_n, Q; -\lambda)$$
$$= \frac{1}{(4\pi)^{n+1}} \Delta u_0(P, \Pi_1) \dots \Delta u_0(\Pi_{n-1}, \Pi_n)\, \eta(r_{\Pi_n Q})\, u_0(\Pi_n, Q)\, \frac{e^{-(r_{P\Pi_1} + \dots + r_{\Pi_n Q})\sqrt{\lambda}}}{r_{P\Pi_1} \cdots r_{\Pi_n Q}}$$
$$= f_n(P, \Pi_1, \dots, \Pi_n, Q)\, \eta(r_{\Pi_n Q})\, \frac{e^{-(r_{P\Pi_1} + \dots + r_{\Pi_n Q})\sqrt{\lambda}}}{r_{P\Pi_1} \cdots r_{\Pi_n Q}}$$

gesetzt. Wegen (3.2) ist für $r_{\Pi_i \Pi_{i+1}} \in \varkappa^\varrho_{\Pi_i}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$

$$(3.22) \qquad |f_n(P, \Pi_1, \dots, \Pi_n, Q)\, \eta(r_{\Pi_n Q})| \leq |\eta(r_{\Pi_n Q})| \left(\frac{m_7}{4\pi}\right)^{n+1}.$$

Wir setzen

$$v(r;x) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{r\sqrt{x}} \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi,$$

so daß

$$e^{-r\sqrt{\lambda}} = \lambda\int_0^{\infty} \frac{v(r;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx \tag{3.23}$$

und somit

$$\int_{\overset{\varrho}{P}}\int_{\overset{\varrho}{\Pi_1}}\cdots\int_{\overset{\varrho}{\Pi_{n-1}}} \chi_n(P,\Pi_1,\ldots,\Pi_n,Q;-\lambda)\,dV_{\Pi_1}\ldots dV_{\Pi_n}$$

$$= \int_{\overset{\varrho}{P}}\int_{\overset{\varrho}{\Pi_1}}\cdots\int_{\overset{\varrho}{\Pi_{n-1}}} \left\{\lambda\int_0^{\infty} v(r_{P\Pi_1}+\cdots+r_{\Pi_nQ};x)\frac{dx}{(\lambda+x)^2}\right\}\times$$

$$\times\ \frac{f_n(P,\Pi_1,\ldots,\Pi_n,Q)}{r_{P\Pi_1}\cdots r_{\Pi_nQ}}\,\eta(r_{\Pi_nQ})\,dV_{\Pi_1}\ldots dV_{\Pi}$$

$$= \lambda\int_0^{\infty}\frac{r_n(P,Q;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx$$

mit

$$r_n(P,Q;x) = \int_{\overset{\varrho}{P}}\int_{\overset{\varrho}{\Pi_1}}\cdots$$

$$\cdots\int_{\overset{\varrho}{\Pi_{n-1}}} v(r_{P\Pi_1}+\cdots+r_{\Pi_nQ};x)\,\frac{f_n(P,\Pi_1,\ldots,\Pi_n,Q)}{r_{P\Pi_1}\cdots r_{\Pi_nQ}}\,\eta(r_{\Pi_nQ})\,dV_{\Pi_1}\ldots dV_{\Pi}$$

ist. Offenbar ist $|v(r;x)| \leq m_{26}$ und somit, wegen (3.22),

$$|r_n(P,Q;x)| \leq m_{27}\left(\frac{m_7}{4\pi}\right)^{n+1}\int_{\overset{\varrho}{P}}\frac{dV_{\Pi_1}}{r_{P\Pi_1}}\int_{\overset{\varrho}{\Pi_1}}\frac{dV_{\Pi_2}}{r_{\Pi_1\Pi_2}}\cdots\int_{\overset{\varrho}{\Pi_{n-1}}}\frac{|\eta(r_{\Pi_nQ})|}{r_{\Pi_{n-1}\Pi_n}r_{\Pi_nQ}}\,dV_{\Pi_n},$$

also wegen (3.19)

$$|r_n(P,Q;x)| \leq m_{27}\left(\frac{m_7}{4\pi}\right)^{n+1}(m_{24}\varrho^2)^{n-1}m_{24}\varrho \leq (m_{10}\varrho^2)^{n-\frac{1}{2}}\ ^{6}). \tag{3.24}$$

e) Aus (3.21) und (3.24) folgt die Behauptung.

4. Beweis des Satzes A. *4.1.* Dem Beweis des Satzes A schicke ich einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Bekanntlich ist ([7], S. 452)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)|}{\lambda_n^2} \leq m_{28} \tag{4.1}$$

---

[6]) In bezug auf die in d) benutzte Beweisanordnung verweise ich auf die Arbeit de Herrn R. BOJANIĆ [3], wo ein ähnlicher (im anderen Zusammenhang stehender) Beweis gedanke benutzt wird. Dort steht auch die Formel (3.23).

und für jedes $\lambda > 0$ und $\underline{\lambda} > 0$

$$(4.2)\quad \begin{cases} G(P, Q; -\lambda) - G(P, Q; -\underline{\lambda}) = -(\lambda - \underline{\lambda}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{(\lambda_n + \underline{\lambda})(\lambda_n + \lambda)} \\ \qquad = \frac{1}{\lambda F} - \frac{1}{\underline{\lambda} F} - (\lambda - \underline{\lambda}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{(\lambda_n + \underline{\lambda})(\lambda_n + \lambda)}, \end{cases}$$

da $\lambda_0 = 0$ und $\Phi_0(P) = \frac{1}{\sqrt{F}}$ ist. Folglich existiert auf $V \times V$

$$a(P, Q) = \lim_{\underline{\lambda} \to 0} \left\{ G(P, Q; -\underline{\lambda}) - \frac{1}{\underline{\lambda} F} \right\},$$

so daß

$$(4.3)\quad \begin{cases} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(P)\,\Phi_n(Q)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = a(P, Q) - G(P, Q; -\lambda) + \frac{1}{\lambda F} \\ \qquad = a(P, Q) - \Gamma_0(P, Q; -\lambda) + \frac{1}{\lambda F} + \gamma_0(P, Q; -\lambda) \end{cases}$$

ist. Wegen (4.1) und (4.3) existiert $\lim_{Q \to P} \{a(P, Q) - \Gamma_0(P, Q; -\lambda)\}$. Infolgedessen und wegen

$$a(P, Q) - \Gamma_0(P, Q; -\lambda) = a(P, Q) - \frac{u_0(P, Q)}{4\pi r_{PQ}} e^{-r_{PQ}\sqrt{\lambda}}$$

$$= a(P, Q) - \frac{u_0(P, Q)}{4\pi r_{PQ}} + \frac{u_0(P, Q)}{4\pi} \sqrt{\lambda} - \frac{u_0(P, Q)}{4\pi r_{PQ}} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(r_{PQ}\sqrt{\lambda})^n}{n!}$$

sowie $u_0(P, P) = 1$ gibt es ein $w(P)$ derart, daß

$$(4.4)\qquad \lim_{Q \to P} \{a(P, Q) - \Gamma_0(P, Q; -\lambda)\} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} + w(P).$$

Dabei ist offenbar $w(P)$ stetig auf V und somit

$$(4.5)\qquad |w(P)| \leq m_2,$$

da V geschlossen ist.

Aus (4.3) und (4.4) folgt schließlich

$$(4.6)\qquad \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n(\lambda_n + \lambda)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} + w(P) + \frac{1}{\lambda F} + \gamma_0(P, P; -\lambda).$$

Es bezeichne $R(P, Q; x)$ die in Hilfssatz 2 erklärte Funktion und es werde $R(P; x) = R(P, P; x)$ gesetzt. Durch die hier gegebenen Definitionen von $w(P)$ und $R(P; x)$ ist das $A(P; x)$ des Satzes A, d.h.

$$A(P; x) = \sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n} - \frac{\sqrt{x}}{2\pi^2} - w(P) + R(P; x)$$

vollständig erklärt, und wegen (3.10) und (4.5) genügen $w(P)$ und $R(P; x)$ den Bedingungen (1.3).

Nun beweise ich: *Wird*

$$A^*(P;x) = \int_0^x A(P;t)\,dt - \frac{1}{F}$$

und

$$f(P;-\lambda) = \lambda \int_0^\infty \frac{A^*(P;x)}{(\lambda+x)^3}\,dx$$

gesetzt, so ist

$$A^*(P;x) = O(x^{\frac{3}{4}}), \qquad x \to \infty \tag{4.7}$$

und

$$|f(P;-\lambda)| \leq m_{30}\frac{1+\lambda}{\lambda}\,e^{-\frac{\varrho_0}{2}\sqrt{\lambda}}. \tag{4.8}$$

Beweis. a) Es habe $\Theta_1(P;x)$ dieselbe Bedeutung wie in 1.5, d.h. es se $\Theta_1(P;x) = \sum_{\lambda_1 \leq \lambda_n \leq x} \Phi_n^2(P)/\lambda_n$, so daß die linke Seite von (4.6) durch

$$\lambda \int_0^\infty d\{\Theta_1(P;x)\}/(\lambda+x)$$

dargestellt werden kann. Wegen $\Theta_1(P;0) = 0$ erhält man daraus durch glied weise Integration die Darstellung

$$\lambda \sum_{n=1}^\infty \frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n(\lambda_n+\lambda)} = \lambda \int_0^\infty \frac{\Theta_1(P;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx. \tag{4.9}$$

b) Wegen der ersten Ungleichung (1.3) ist

$$\left|\lambda \int_0^\infty \frac{R(P;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx\right| \leq m_1$$

und somit auf Grund des Hilfssatzes 2

$$\gamma_0(P,P;-\lambda) = O(1) \quad (\lambda \to \infty). \tag{4.10}$$

Aus (4.6), (4.9) und (4.10) folgt

$$\lambda \int_0^\infty \frac{\Theta_1(P;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx = O(\sqrt{\lambda}) \quad (\lambda \to \infty).$$

Da $\Theta_1(P;x)$ nicht abnimmt, ist

$$\Theta_1(P;\lambda) = \Theta_1(P;\lambda)\,2\lambda \int_\lambda^\infty \frac{dx}{(\lambda+x)^2} \leq 2\lambda \int_0^\infty \frac{\Theta_1(P;x)}{(\lambda+x)}\,dx = O(\sqrt{\lambda})$$

und somit

$$A(P;x) = O(\sqrt{x}), \tag{4.11}$$

woraus sich (4.7) unmittelbar ergibt.

c) Wegen $\lambda\int_0^\infty \sqrt{\lambda}\,dx/(\lambda+x)^2=\pi\sqrt{\lambda}/2$ und (4.9) ist

$$(4.12)\quad \lambda\int_0^\infty \frac{A(P;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx=\lambda\sum_{\lambda_1\le\lambda_n\le x}\frac{\Phi_n^2(P)}{\lambda_n}-\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}-w(P)+\lambda\int_0^\infty\frac{R(P;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx.$$

Wird das linksstehende Integral partiell integriert und $2\lambda\int_0^\infty dx/(\lambda+x)^3=1/\lambda$ beachtet, so sieht man, daß die linke Seite von (4.12) gleich $2f(P;-\lambda)+1/\lambda F$ ist. Infolgedessen und nach Formel (4.6) erhält man die Beziehung

$$2f(P;-\lambda)=\gamma_0(P,P;-\lambda)+\lambda\int_0^\infty\frac{R(P;x)}{(\lambda+x)^2}\,dx.$$

d) Daraus folgt (auf Grund des Hilfssatzes 2) $f(P;-\lambda)=O\left(e^{-\frac{\varrho_0}{2}\sqrt{\lambda}}\right)$, und zwar gleichmäßig in bezug auf P.

e) Wegen (4.1), (4.6) und (4.5) ist

$$|\gamma_0(P,P;-\lambda)|\le\frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}+m_2+\frac{1}{\lambda F}+\lambda\,m_{28},\ \text{d.h. }\gamma_0(P,P;-\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda\to 0,$$

und zwar gleichmäßig in bezug auf P.

f) Aus d) und e) folgt (4.8).

4.2. Nun gehe ich zum letzten Schritt des Beweises über. Den Ausgangspunkt bilden die Ungleichungen (4.7) und (4.8) und die bekannte Formel

$$\frac{e^{-|s|\sqrt{u}}}{\sqrt{u}}=\int_0^\infty\frac{\cos s\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\frac{d\lambda}{\lambda+u}\qquad (s\text{ reell}).$$

Durch zweimalige gliedweise Integration erhält man daraus die Formel

$$\frac{e^{-|s|\sqrt{u}}}{\sqrt{u}}=\int_0^\infty\frac{h(s;\lambda)}{(\lambda+u)^3}\,d\lambda$$

mit

$$(4.13)\qquad h(s;\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\lambda dt_1\int_0^{t_1}\frac{\cos s\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_2}}\,dt_2.$$

Wegen (4.8) und der unmittelbar ersichtlichen Ungleichung $|h(s;\lambda)|\le\frac{8}{3\pi}\lambda^{\frac{3}{2}}$ existiert das über $(0,\infty)$ erstreckte Integral von $f(P;-\lambda)\,h(s;\lambda)/\lambda$. Im derart gebildeten Doppelintegral läßt sich wegen (4.7) die Reihenfolge der Integration vertauschen (Satz von FUBINI) und man erhält für $s>0$

$$(4.14)\qquad \begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty f(P;-\lambda)\,h(s;\lambda)\,\frac{d\lambda}{\lambda}=\int_0^\infty A^*(P;u)\,du\int_0^\infty\frac{h(s;\lambda)}{(\lambda+u)^3}\,d\lambda\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\displaystyle=\int_0^\infty e^{-s\sqrt{u}}\,A^*(P;u)\,\frac{du}{\sqrt{u}}=\varphi^*(P;s).\end{cases}$$

Ich beweise zunächst: $\varphi^*(P;s)$ *ist in der rechten Halbebene und im Kreis* $|s|<\frac{\varrho_0}{2}$ *regulär und für* $|s|\leqq\frac{\varrho_0}{3}$ *gleichmäßig beschränkt in bezug auf* s *und* P.

Beweis. a) Wegen (4.7) und (4.8) konvergieren für positive s sowohl die linke Seite von (4.14) als auch das an zweiter Stelle rechts stehende LAPLACE-Integral. Bezüglich des ersten Teiles der Behauptung haben wir also nur noch zu zeigen, daß die linke Seite von (4.14) absolut konvergiert, falls $|s|<\frac{\varrho_0}{2}$. Dies ist aber eine unmittelbare Folge von (4.8) und der für jedes komplexwertige s gültigen Ungleichung

$$|h(s;\lambda)|\leqq\frac{2}{\pi}e^{|s|\sqrt{\lambda}}\int_0^{\lambda}dt_1\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{\sqrt{t_2}}\leqq\frac{8}{3\pi}\lambda^{\frac{3}{2}}e^{|s|\sqrt{\lambda}}. \tag{4.15}$$

b) Wegen (4.8) und (4.14) ist für $|s|\leqq\frac{\varrho_0}{3}$,

$$|\varphi^*(P;s)|\leqq\frac{8m_{30}}{3\pi}\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{\varrho_0}{2}-|s|\right)\sqrt{\lambda}}\frac{1+\lambda}{\sqrt{\lambda}}d\lambda\leqq m_{31}\int_0^{\infty}e^{-\frac{\varrho_0}{6}\sqrt{\lambda}}\frac{1+\lambda}{\sqrt{\lambda}}d\lambda$$
$$\leqq m_{32}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_0^3}\right),$$

womit auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen ist.

Wegen

$$\int_0^X e^{-sv}\,d\{A^*(P;v^2)\}=A^*(P;X^2)\,e^{-sX}-A^*(P;0)+s\int_0^X e^{-sv}A^*(P;v^2)\,dv$$

und (4.7) ist für $\Re(s)>0$

$$\int_0^{\infty}e^{-sv}\,d\{A^*(P;v^2)\}=-A^*(P;0)+s\int_0^{\infty}e^{-sv}A^*(P;v^2)\,dv.$$

Denn wegen (4.14) existiert das rechtsstehende Integral und ist gleich $\frac{s}{2}\varphi^*(P;s)$. Also ist

$$\frac{S}{2}\varphi^*(P;s)=A^*(P;0)+\int_0^{\infty}e^{-sv}d\{A^*(P;v^2)\}.$$

Wegen $A^*(P;0)=-\frac{1}{F}$ und $d\{A^*(P;v^2)\}=2vA(P;v^2)\,dv$ erhält man schließlich

$$\frac{S}{2}\varphi^*(P;s)=-\frac{1}{F}+2\int_0^{\infty}e^{-sv}v\,A(P;v^2)\,dv.$$

Infolgedessen ist

$$\varphi^{**}(P;s)=\int_0^{\infty}e^{-sv}v\,A(P;v^2)\,dv \tag{4.16}$$

in der rechten Halbebene einschließlich $|s|<\frac{\varrho_0}{2}$ regulär und für $|s|\leqq\frac{\varrho_0}{3}$ gleichmäßig beschränkt in bezug auf s und P.

Daraus folgt: *Für alle in der rechten Halbebene oder im Kreis* $|s| < \frac{\varrho_0}{2}$ *liegenden* s *existiert*

$$\varphi(P;s) = \int_S^\infty \varphi^{**}(P;Z)\, dZ \tag{4.17}$$

und ist daselbst regulär und für $|s| \leqq \frac{\varrho_0}{3}$ *gleichmäßig beschränkt in bezug auf* s *und* P.

Wegen (4.16) und (4.17) ist für $\Re(s) > 0$

$$\varphi(P;s) = \int_0^\infty e^{-sv} A(P;v^2)\, dv,$$

womit der Beweis des Satzes A beendet ist[7]).

5. Das Gegenbeispiel. *5.1.* V sei durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ definiert und Δ durch Polarkoordinaten $x_1 = \sin x^1, \ldots, x_4 = \sin x^1 \sin x^2 \sin x^3$ ausgedrückt. Dann ist $F = 2\pi^2$ und $n(n+2)$ sind die Eigenwerte von $(\Delta + \lambda) u = 0$. Jeder Eigenwert ist $(n+1)^2$-fach besetzt. $w_n^i(P)$ $\left(i = 1, 2, \ldots, (n+1)^2\right)$ seien die dem Eigenwert $n(n+2)$ entsprechenden linear unabhängige Eigenfunktion. Dann ist (vgl. [6] und [11])

$$\int_V w_n^i(\Pi)\, w_n^j(\Pi)\, dV_n = 0 \quad \text{bzw. } 1$$

je nachdem ob $i \neq j$ oder $i = 1$ ist, und

$$\sum_{i=1}^{i=(n+1)^3} w_n^i(P)\, w_n^i(Q) = C_n^3(\cos\vartheta)\, \frac{1}{2\pi^2}. \tag{5.1}$$

Dabei ist $\cos\vartheta = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ [8]) und die $C_n^3(\cos\vartheta)$ sind mittels

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^3(\cos\vartheta)\, z^n = \frac{1 - z^2}{(1 - 2z\cos\vartheta + z^2)^2}$$

erklärt, so daß

$$C_n^3(1) = (n+1)^2 \tag{5.2}$$

ist.

5.2. Wegen (5.1) und (5.2) ist für ganzzahlige x

$$\Theta\big(P; x(x+2)\big) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{n=x} (n+1)^2 = \frac{1}{12\pi^2} (2x+3)(x+2)(x+1),$$

also

$$\frac{\Theta(P; x(x+2)) - \frac{1}{6\pi^2}(x+2)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{(x+2)\, x} = \frac{x}{6\pi^2}\left[\left(1 + \frac{3}{2x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

[7]) Die in 4.2 benutzte Beweismethode ist im Grunde dieselbe, welche ich in [1] verwendet habe. Diesbezüglich sei auch auf die Arbeit des Herrn V. VUČKOVIĆ [12] verwiesen.

[8]) $x_1, \ldots, x_4$ bzw. $y_1, \ldots, y_4$ sind die Koordinaten von P bzw. Q.

und somit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Theta(P; x(x+2)) - \frac{1}{6\pi^2}(x+2)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{(x+2)\,x} = \frac{1}{4\pi^2}.$$

Wegen $$\sum_{\lambda_n \le (x+2)\,x} 1 = \sum_{n=0}^{n=x} (n+1)^2$$ ist schließlich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{\lambda_n \le (x+2)\,x} 1 - \frac{1}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{(x+2)\,x} = \frac{3}{4}.$$

Literatur

[1] Avakumović, V. G.: Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman. Math. Z. **53**, 53—58 (1950). — [2] Avakumović, V. G.: Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. Publ. Math. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **4**, 95—96 (1952). — [3] Bojanić, R.: Propriétés asymptotiques des solutions des équations différentielles lineaires. Recueil Trav. Acad. Serbe Sci. **35**, Inst. Math. **3**, 213—254 (1953). — [4] Carleman, T.: Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. C. R. Skand. Math. Kongress **1934**, 34—44. — [5] Courant-Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. I. 1931. — [6] Heine: Kugelfunktionen. 1878. — [7] Goursat: Cours d'Analyse, Bd. III. 1942. — [8] Ingham, A. E.: On Wiener's method in Tauberian theorems. Proc. London Math. Soc. **38**, 458—480 (1935). — [9] Karamata, J.: Über einen Satz von H. Heilbron und E. Landau. Publ. Math. Univ. Belgrad **5**, 28—38 (1936). — [9a] Levitan, B. M.: Über Entwickelungen nach den Eigenfunktionen des Laplaceschen Operators. (Russisch.) Dokl. Akad. Nauk SSSR. **90**, 133—135 (1953). — [10] Minakshisundaram, S., and A. Pleijel: Some properties of eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds. Canadian J. Math. **1**, 242—256 (1949). — [11] Minakshisundaram, S.: Zeta-functions on the Sphere. J. Indian Math. **13**, 41—48 (1949). — [12] Vučković, V.: Die Stieltjes-Transformation, die mit Geschwindigkeit der Exponentialfunktion unendlich klein wird. Recueil Trav. Acad. Serbe Sci. **35**, Inst. Math. **3**, 255—288 (1953). — [13] Watson, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 1944. — [14] Weyl, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. Math. Ann. **71**, 441—471 (1911).

Institut Mathematique de l'Academie Serbe des Sciences Belgrade (Yougoslavie)

(Eingegangen am 1. Dezember 1955)

FOULKES, H. O.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 345—352 (1956)

Theorems of Kakeya and Pólya on power-sums

By
H. O. FOULKES

1. Introduction

In 1925, KAKEYA [1] proved that any symmetric function of n indeterminates x_i, $i=1, \ldots, n$ could be expressed as a rational function of a fundamental set

(I) $$s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n},$$

where $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ and $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ are the first n positive integers which do not belong to an additive sequence, or semigroup, of positive integers. By choosing the semigroup in different ways various special cases arise. These have appeared as theorems of LAGUERRE [2], BORCHARDT [3], VAHLEN [4] and LUDWIG [5]. KAKEYA's proof however gives no means of expressing any given symmetric function, even of the simplest kind such as s_k, $k \neq \nu_i$ or $a_r = \sum x_1 x_2 \ldots x_r$, $r \leq n$, in the required rational form. This problem has been attacked by some of the above writers and also by NAKAMURA [6], PÓLYA [7] and PERRON [8], [9] but with only partial success.

In this paper I use Schur functions to give a short proof of KAKEYA's theorem which has the additional merit that it may be used to derive simple explicit expressions for the functions s_k and a_r. Furthermore I give a new proof of a theorem of PÓLYA which in the same way gives a precision to the theorem which was lacking in the original proof.

2. Preliminary results on S-functions

Let $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ be any partition of a positive integer m, with $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$. Then the SCHUR function $\{\lambda\}$ is defined as [10]

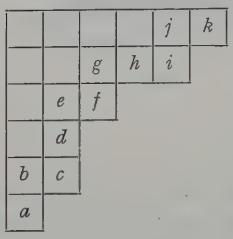
$$\{\lambda\} = \frac{1}{m!} \sum_{\varrho} h_\varrho \chi_\varrho^\lambda S_\varrho,$$

where $(\varrho) = (1^{\varrho_1} 2^{\varrho_2} \ldots)$ is a partition of m defining a conjugate class of order h_ϱ of the symmetric group of order $m!$, χ_ϱ^λ is the characteristic of the class (ϱ) in the irreducible (λ) representation of the group, and $S_\varrho = s_1^{\varrho_1} s_2^{\varrho_2} \ldots$. We shall also need the differential operator [11]

$$D_\lambda = \sum \frac{\chi_\varrho^\lambda}{\varrho_1! \varrho_2! \ldots} \frac{\partial^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots}}{\partial s_1^{\varrho_1} \partial s_2^{\varrho_2} \ldots},$$

which is obtained from $\{\lambda\}$ by replacing every s_i^a by $i^a \frac{\partial^a}{\partial s_i^a}$. I have shown [11] that $D_\lambda \{\mu\} = \sum g_{\nu\lambda\mu} \{\nu\}$, where $\{\nu\}\{\lambda\} = \sum g_{\nu\lambda\mu} \{\mu\}$.

Partitions will be represented by diagrams of squares in the usual way. If in a diagram we can start at the bottom of any column and, working to the right or upwards or both in any succession, remove a continuous strip of α squares from the edge of the diagram so as to finish at the right hand end of a row, then we say that the diagram has a removable α-strip [12]. Thus when $(\lambda)=(6532^21)$, we have two removable 6-strips, *abcdef* and *fghijk*. The removable 4-strips are *abcd*, *cdef*, *fghi* and *hijk*. There are no removable 5, 8 or 10-strips. In effect, a strip is removable when its deletion leaves a proper partition diagram, or possibly no diagram at all.



We need three simple well known results from S-function theory.

Lemma 1. *An S-function* $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\}$ *of n indeterminates vanishes identically if* $r>n$, ([10], p. 91).

Lemma 2. *If the* (λ)*-diagram has no removable* α*-strip, then* χ_ϱ^λ *is zero for any* S_ϱ *which contains a non-zero power of* s_α ([10], p. 68–71; [12]).

Lemma 3. *If the* (λ)*-diagram has a removable* α*-strip, then* χ_ϱ^λ*, where* S_ϱ *contains a non-zero power of* s_α*, is non-zero for at least one* ϱ.

This follows since if a (μ)-diagram is obtained by removing the α-strip, then not all the characteristics of the irreducible (μ) representation of the symmetric group of order $(m-\alpha)!$ can be zero.

3. KAKEYA'S Theorem

An additive sequence A will be determined by a set of basis integers, and will consist of multiples of the greatest common divisor d of this set. It will contain all the multiples of d greater than some fixed value, and so if $d=1$, A will contain all but a finite number of the positive integers and there will be a greatest value N of n. If $d\neq 1$ there is no restriction on n. In the following, when a value of n is chosen it should be understood that it is a possible one for the particular A, that is, it cannot exceed N.

KAKEYA'S Theorem. *If* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ *are the first n positive integers which do not belong to a given additive sequence, then for n indeterminates every* s_r *can be expressed as a rational function of* $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$.

Proof. Let α be the first member of the additive sequence A. Construct a partition diagram, starting at its lowest point, by erecting a column of α squares. Then start a row of squares to the right using the top square of the α-column as starting point. As soon as the total number of squares in the column and the row is a number x, not in A, start erecting another column with the x-square as its lowest point. Continue this column until the total number of squares in the two columns and the single row is a number

β of A. Now turn again from the vertical to the horizontal and continue the row to the right until the total number of squares in the two columns and the two rows is a number y not in A. Continuing in this way, changing from column to row and row to column as dictated by the numbers $\alpha, \beta, \ldots \in A$ and $x, y, \ldots \notin A$, we obtain the edge of a partition diagram which is entirely determined by A. If $d = 1$ there will be a finite number of rows in the diagram but the top row will extend indefinitely to the right. If $d \neq 1$ the number of rows will be infinite.

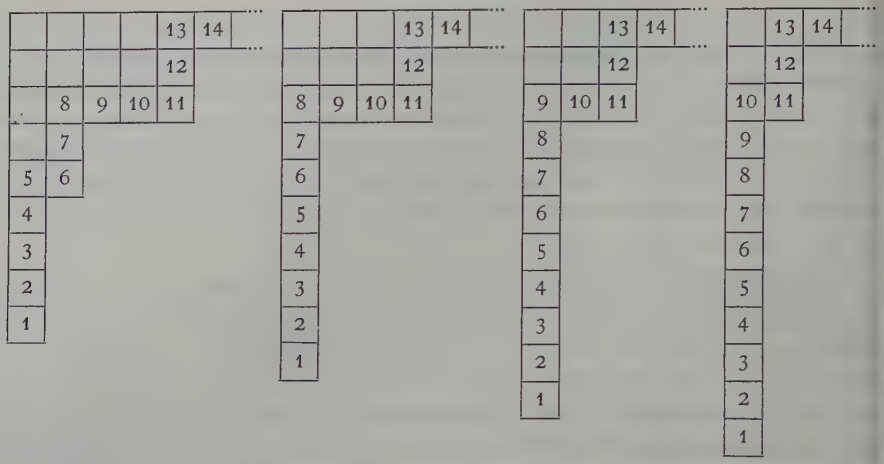
Although not essential to the proof, we remark here that if we choose any value of n (but $< N$, when $d = 1$) and cut off the diagram after $n+1$ rows starting from the bottom, we obtain a diagram of some partition (ξ_1) which is such that $\{\xi_1\}$ vanishes identically by Lemma 1. Also the diagram has been so constructed that it has no removable k-strip where $k \in A$. Hence $\{\xi_1\} = 0$ gives an identity between $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}, s_{\nu_{n+1}}$. The actual polynomial can be written down from the group character tables or by using some of the known rules for finding particular characteristics.

Continuing with the proof, delete the second column of the full partition diagram and move the complete first column one place to the right to close the gap. Then add one square to the bottom of the first column. It is now possible to remove an α-strip from the resulting diagram, but only one such strip can be removed, and there is no other removable k-strip, where $k \in A$. Take $n+1$ rows of this diagram thus obtaining the diagram of some partition (ξ_2). By Lemma 1, $\{\xi_2\} = 0$, and so by Lemma 2 we have a polynomial identity between $s_\alpha, s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$ in which s_α occurs to the first degree only, and occurs with a non-zero coefficient by Lemma 3. Thus s_α is expressed as a rational function of (I).

Next delete the second column of the last full diagram, move the first column one place to the right and add one square to the bottom of the first column, exactly as at the preceding stage. It will now be possible to remove one, or more, α-strips from the new diagram, but if α' is the second member of A, there will be one and only one removable α'-strip and there will be no other removable k-strips, where $k \in A$. Take $n+1$ rows of this diagram, giving a partition (ξ_3). Then $\{\xi_3\} = 0$ gives a polynomial identity between $s_\alpha, s_{\alpha'}, s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_n}$ in which $s_{\alpha'}$ appears with non-zero coefficient and only to the first degree. Hence $s_{\alpha'}$ is expressed as a rational function of (I).

When $d \neq 1$, we can proceed in precisely the same way to express every s_k, $k \in A$, as a rational function of (I). When $d = 1$, the various identities $\{\xi_t\} = 0$ will at some stage become $\{1^{N+1}\} = 0$. This expresses s_{N+1} in the required form, and similarly every s_{N+l}, $l = 2, 3, \ldots$, is obtained from $\{1^{N+l}\} = 0$. This completes the proof.

EXAMPLE 1. Take 5, 8, 9 as basis so that A is 5, 8, 9, 10, 13, 14, ... and the possible values for $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ will be taken from 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12. Here $d = 1$, $N = 8$ and the first four diagrams are



When $n=6$, $\{5^2 2^1 1^4\}=0$ gives s_{11} as a rational function of $s_1, s_2, s_3, s_4, s_6, s_7$, and $\{5^2 2^2 1^4\}=0$ would give s_{12} as a rational function of $s_1, s_2, s_3, s_4, s_6, s_7, s_{11}$. These can however be obtained from S-functions of lower weight, for $\{1^7\}=0$ gives

$$s_5=(s_1^7-21s_1^5s_2+70s_1^4s_3-210s_1^3s_4+105s_1^3s_2^2-420s_1^2s_2s_3-840s_1s_6$$
$$+630s_1s_2s_4-105s_1s_2^3+280s_1s_3^2+210s_2^2s_3-420s_3s_4+720s_7)/504(s_2-s_1^2),$$

$\{1^8\}=0$ gives s_8, and so on for every further s_r.

When $n=7$, $\{5^2 2^2 1^4\}=0$ gives s_{12} in the required form as above, and $\{41^7\}=0$ gives s_5 as a rational function of $s_1, s_2, s_3, s_4, s_6, s_7, s_{11}$. For s_r, $r\geq 8$, we use $\{1^r\}=0$.

When $n=8$, we use $\{4^2 1^7\}=0$, $\{31^8\}=0$, $\{1^r\}=0$ to give respectively s_5, s_8, s_r, where $r=9, 10, 13, \ldots$, as rational functions of $s_1, s_2, s_3, s_4, s_6, s_7, s_{11}, s_{12}$.

EXAMPLE 2. If the additive sequence consists merely of all the multiples of an integer α, we have the case considered by VAHLEN [4]. The successive partition diagrams obtained in the above proof are those of $(\ldots 3^{\alpha-1}2^{\alpha-1}1^{\alpha-1})$, $(\ldots 3^{\alpha-1}2^{\alpha-1}1^{2\alpha-1})$, $(\ldots 3^{\alpha-1}2^{\alpha-1}1^{3\alpha-1})$ and so on. When $\alpha=2$, the initial partition diagram is $(\ldots 4321)$ and the first identity obtained is $\{n+1, n, \ldots, 321\}=0$. For $n=1, 2, 3$ this gives $s_1^3-s_3=0$,

$$s_1^6-5s_1^3s_3+9s_1s_5-5s_3^2=0,$$

$$s_1^{10}-15s_1^7s_3+63s_1^5s_5-225s_1^3s_7+315s_1^2s_3s_5-175s_1s_3^3+225s_3s_7-189s_5^2=0.$$

These expressions appeared, but not perhaps in such a natural and predictable fashion, in the papers of PÓLYA [7] and PERRON [8].

Taking $n=3$, the last of these identities gives s_7 as a rational function of s_1, s_3, s_5 and from $\{21^3\}=0$ we have

$$s_2=\frac{s_1^5+5s_1^2s_3-6s_5}{5(s_1^3-s_3)}.$$

We deal with $s_4, s_6, s_8, s_9, \ldots$ by using $\{1^r\}=0$, $r=4, 6, 8, 9, \ldots$.

4. Expressions for the elementary symmetric functions a_r as rational functions of a fundamental set

THEOREM. *If (λ) is the partition of n rows determined by a given additive sequence and a given n, then the expression for a_r as a rational function of the fundamental set is*

$$a_r = \frac{D_{1^{n-r}}\{\lambda\}}{D_{1^n}\{\lambda\}}.$$

PROOF. For n indeterminates, $\{\lambda\}$ will not vanish identically and is a polynomial in $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$. Also $\{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \ldots, \lambda_n-1\}$ is a non-vanishing polynomial in the same power sums since it is obtained from $\{\lambda\}$ by differentiating in accordance with $D_{1^n}\{\lambda\} = \{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \ldots, \lambda_n-1\}$.

Since we have n indeterminates only, the product $a_r\{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \ldots, \lambda_n-1\}$ will contain only those S-functions whose partitions can be obtained by taking from the edge of the (λ)-diagram $n-r$ squares no two of which are in the same row. But these are precisely the S-functions given by $D_{1^{n-r}}\{\lambda\}$, which is a non-vanishing polynomial in $s_{\nu_1}, s_{\nu_2}, \ldots, s_{\nu_n}$.

Hence

$$a_r = \frac{D_{1^{n-r}}\{\lambda\}}{D_{1^n}\{\lambda\}}.$$

EXAMPLE. Take $n=4$ and the fundamental set as s_1, s_3, s_5, s_7. We have $\{\lambda\} = \{4321\}$ and $a_4 = \{4321\}/\{321\}$

$$= \frac{s_1^{10} - 15s_1^7 s_3 + 63s_1^5 s_5 - 225s_1^3 s_7 + 315s_1^2 s_3 s_5 - 175s_1 s_3^3 + 225s_3 s_7 - 189s_5^2}{105(s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2)}.$$

The denominator $\{321\}$ is of course read off from the character tables; it could be verified that it is

$$D_{1^4}\{4321\} = \left(\frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial s_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_3}\right)\{4321\}.$$

Also

$$a_3 = \frac{D_1\{4321\}}{\{321\}} = \frac{\frac{\partial}{\partial s_1}\{4321\}}{\{321\}} = \frac{2s_1^9 - 21s_1^6 s_3 + 63s_1^4 s_5 - 135s_1^2 s_7 + 126s_1 s_3 s_5 - 35s_3^3}{21(s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2)}$$

and

$$a_2 = \frac{D_{1^2}\{4321\}}{\{321\}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\{4321\}}{\{321\}} = \frac{3(s_1^8 - 7s_1^5 s_3 + 14s_1^3 s_5 - 15s_1 s_7 + 7s_3 s_5)}{7(s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2)}.$$

Finally the theorem gives

$$a_1 = \frac{D_{1^3}\{4321\}}{\{321\}} = \frac{\left(\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial s_1^3} + \frac{\partial}{\partial s_3}\right)\{4321\}}{\{321\}}$$

which of course reduces to s_1.

5. Pólya's Theorem

Incidental to his discussion of the precise expression of a_r in terms of $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$, PÓLYA [7] proved some interesting results on two sets of n indeterminates. Here I shall prove these results by means of SCHUR functions. As in the proof of KAKEYA's theorem, this method excels in that it gives complete information as to the actual rational functions involved. I have shown previously [11] that if $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ and $t_k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k$, then

$$\varphi(s_1+t_1, s_2+t_2, \ldots, s_m+t_m) = [\{0\}' D_0 + \{1\}' D_1 + \{2\}' D_2 + \{1^2\}' D_{1^2} + \cdots]\, \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_m),$$

where $\{\lambda\}'$ denotes an S-function of $y_1, y_2, \ldots, y_n$. If every t_k is replaced by $-t_k$ then $\{\lambda\}'$ changes into its conjugate $\{\tilde{\lambda}\}'$ and acquires a negative sign if (λ) is a partition of an odd number. Hence, if $u_k = s_k - t_k$, then

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = [1 - \{1\}' D_1 + \{1^2\}' D_2 + \{2\}' D_{1^2} - \\ \qquad - \{1^3\}' D_3 - \{21\}' D_{21} - \{3\}' D_{1^3} + \cdots]\, \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_m). \end{cases}$$

In particular, the functions

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = \tfrac{1}{2}(u_1^2 + u_2), \quad v_3 = \tfrac{1}{6}(u_1^3 + 3u_1u_2 + 2u_3),$$
$$v_4 = \tfrac{1}{24}(u_1^4 + 3u_2^2 + 8u_1u_3 + 6u_1^2u_2 + 6u_4), \ldots$$

used by PÓLYA, are obtained from $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$, by merely replacing every s_i by u_i, and can be written as

$$\text{(III)} \quad v_r = \{r\} - \{1\}'\{r-1\} + \{1^2\}'\{r-2\} - \{1^3\}'\{r-3\} + \cdots + (-1)^r\{1^r\}'.$$

PÓLYA'S THEOREM. *If* $R = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i - y_j)$ *and* $b_r = \sum y_1 y_2 \ldots y_r$, *then*

$$\text{(i)} \quad V_n = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ v_2 & v_3 & \ldots & v_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ v_n & v_{n+1} & \ldots & v_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} R;$$

(ii) R *does not contain* u_{2n};

(iii) *the* $2n+1$ *quantities* $R, Ra_1, Ra_2, \ldots, Ra_n; Rb_1, Rb_2, \ldots, Rb_n$ *are polynomials in* $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$.

PROOF. By elementary transformations of the determinant V_n in conjunction with relation (III) it is easily shown that

$$V_n = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{vmatrix} \{1\} - \{1\}' & \{2\} - \{2\}' & \ldots & \{n\} - \{n\}' \\ \{1^2\} - \{1^2\}' & \{21\} - \{21\}' & \ldots & \{n1\} - \{n1\}' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \{1^n\} - \{1^n\}' & \{21^{n-1}\} - \{21^{n-1}\}' & \ldots & \{n1^{n-1}\} - \{n1^{n-1}\}' \end{vmatrix}.$$

If $x_i = y_j$, then both these variables will vanish from every u_k and every v_r will be a function of $n-1$ x's and $n-1$ y's. By Lemma 1 the terms in the last row of the above determinant will be zero and so we can prove (i).

Next

$$\begin{vmatrix} \{1\} & \{2\} & \dots & \{n\} \\ \{2\} & \{3\} & \dots & \{n+1\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{n\} & \{n+1\} & \dots & \{2n-1\} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \begin{vmatrix} \{n\} & \{n+1\} & \dots & \{2n-1\} \\ \{n-1\} & \{n\} & \dots & \{2n-2\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{1\} & \{2\} & \dots & \{n\} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \{n^n\},$$

and so R is easily written down from the polynomial expression for $\{n^n\}$ by merely writing u_i for every s_i. Since the diagram of (n^n) has no removable $2n$-strip then, by Lemma 2, $\{n^n\}$ will not contain s_{2n} and hence R will not contain u_{2n}, which proves (ii).

From (II),

$$R = [1 - \{1\}' D_1 + \{1^2\}' D_2 + \{2\}' D_{1^2} - \dots + (-1)^n \{n^n\}' D_{n^n}] \{n^n\}$$

where $\{\lambda\}'$ is confined to those partitions with no part greater than n and with not more than n parts. Using Lemma 1, we have $\{1^r\}\{n^n\} = \{(n+1)^r n^{n-r}\}$. The determinant form of this S-function in terms of the a_r will be of order $n+1$, and its leading principal minor of order n will be $\{n^n\}$. The $(n+1)$th column will be zero except for the lowest member a_r. Since no (λ) has more than n parts the operator D_λ will affect only the first n columns and so

$$D_\lambda \{1^r\}\{n^n\} = D_\lambda \{(n+1)^r n^{n-r}\} = \{1^r\} D_\lambda \{n^n\}.$$

Hence

$$\{1^r\} R = [1 - \{1\}' D_1 + \{1^2\}' D_2 + \{2\}' D_{1^2} - \dots + (-1)^n \{n^n\}' D_{n^n}] \{(n+1)^r n^{n-r}\}.$$

If $\{(n+1)^r n^{n-r}\} = F(s_1, s_2, \dots, s_{2n})$, then the polynomial F can be found from group character tables or known combinatorial rules for the coefficients [12] and we have

$$a_r R = F(u_1, u_2, \dots, u_{2n}).$$

A trivial modification, merely changing u_i to $-u_i$, suffices to give the polynomial $b_r R$ and so (iii) is proved.

In conclusion, I remark that other formulae given by PÓLYA and PERRON can be written in convenient S-function forms. Thus $w_1 = 2s_1$, $w_2 = 2s_1^2$, $w_3 = \frac{1}{3}(4s_1^3 + 2s_3)$, ... are all given by $w_r = 2(\{r\} + \{r-1, 1\} + \{r-2, 1^2\} + \dots + \{1^r\})$ and

$$\begin{vmatrix} w_1 & 2 \\ w_3 & w_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w_1 & 2 & . \\ w_3 & w_2 & w_1 \\ w_5 & w_4 & w_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} w_1 & 2 & . & . \\ w_3 & w_2 & w_1 & 2 \\ w_5 & w_4 & w_3 & w_2 \\ w_7 & w_6 & w_5 & w_4 \end{vmatrix}, \dots$$

are numerical multiples of $\{21\}$, $\{321\}$, $\{4321\}$, ... Also

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ w_2 & w_3 & \dots & w_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & w_{n+1} & \dots & w_{2n-1} \end{vmatrix}$$

for successive values of n, becomes numerical multiples of $\{1\}$, $\{1\}\{21\}$, $\{21\}\{321\}$, $\{321\}\{4321\}$, ...

References

[1] Kakeya, S.: On fundamental systems of symmetric functions. I, II. Jap. J. Math. **2**, 69—80 (1925); **4**, 77—85 (1927). — [2] Laguerre, E.: Sur un problème d'algèbre. Bull. Soc. Math. France **5**, 26—30 (1877); Oeuvres **I**, S. 119—122. — [3] Borchardt, C. W.: Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung. Monatsber. Akad. Berlin **1857**, 301—311; Ges. Werke, S. 107—118. — [4] Vahlen, K. T.: Über Fundamentalsysteme für symmetrische Funktionen. Acta math. **23**, 91—120 (1900). — [5] Ludwig, B. v.: Ein neues Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen. Math. Ann. **83**, 67—69 (1921). — [6] Nakamura, K.: On the representation of symmetric functions by power sums which form the fundamental system. Jap. J. Math. **4**, 87—92 (1927). — [7] Pólya, G.: Remarques sur un problème d'algèbre étudié par Laguerre. J. Math. pur. appl. **31**, 37—47 (1951). — [8] Perron, O.: Über die Abhängigkeit von Potenzsummen und einen Satz von Pólya. Math. Z. **63**, 19—30 (1955). — [9] Perron, O.: Über Potenzsummen. Math. Z. **64**, 103—114 (1956). — [10] Littlewood, D. E.: The theory of group characters, 2nd Ed. Oxford 1950. — [11] Foulkes, H. O.: Differential operators associated with S-functions. J. London Math. Soc. **24**, 136—143 (1949). — [12] Boerner, M.: Darstellungen von Gruppen, p. 173—176. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

University College, Swansea, Wales (Great Britain)

(Eingegangen am 3. Februar 1956)

Zaddach, A.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 353—388 (1956)

Über Anti-Fano-Ebenen

Von
Arno Zaddach

Einleitung

Als *Anti-Fano-Ebenen* sollen hier solche projektiven Ebenen bezeichnet werden, in denen jedes Viereck kollineare Diagonalpunkte besitzt, also gegen das Axiom von Fano verstößt. In ihnen gilt trivialerweise der Satz vom vollständigen Vierseit.

Wird umgekehrt für eine Ebene der Satz vom vollständigen Vierseit vorausgesetzt, so ist sie nach [9] entweder eine Anti-Fano-Ebene oder aber eine Ebene, in der das Fano-Axiom erfüllt ist. Für den letzteren Fall hat Moufang die Gültigkeit des kleinen Desarguesschen Satzes bewiesen und aus diesem eine Reihe von Folgerungen gezogen:

(α) *Jede von einem nichtausgearteten Punktquadrupel erzeugte Unterebene* (in [4] als 8-parametriges Netz bezeichnet) *ist eine Ebene über einem Primkörper;*

(β) *jede Unterebene, die von dem eben genannten Quadrupel und einem weiteren Punkt auf einer Verbindungsgerade erzeugt wird* (in [5]: 9-parametriges Netz), *ist eine Ebene über einer einfachen Erweiterung eines Primkörpers;*

(γ) *jede Unterebene, die von dem genannten Quadrupel und zwei weiteren Punkten einer Verbindungsgerade erzeugt wird* (in [6], [7]: 10-parametriges Netz), *ist eine Ebene über einem Schiefkörper;*

(δ) *die ganze Ebene ist eine Ebene über einem Alternativkörper* [8].

Im Fall der Anti-Fano-Ebene ist natürlich (α) richtig: Das nichtausgeartete Quadrupel erzeugt die bekannte Sieben-Punkte-Ebene über dem Primkörper der Charakteristik 2. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, auch (β) zu beweisen. Die Frage, ob in jeder Anti-Fano-Ebene der kleine Desarguessche Satz und damit auch (γ) und (δ) gilt, bleibt weiterhin unentschieden.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für wertvolle Hinweise bin ich Herrn G. Pickert zu großem Dank verpflichtet.

§1. Ternärkörper

Dem Begriff der *projektiven Ebene* werden die Inzidenzaxiome und ein Reichhaltigkeitsaxiom zugrunde gelegt:

Je zwei verschiedene Punkte A und B lassen sich durch genau eine Gerade AB verbinden;

je zwei verschiedene Geraden AB und CD schneiden sich in genau einem Punkt $AB \cap CD$;

es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei kollinear sind.

Eine *affine Ebene* erhält man hieraus, indem man eine Gerade und die auf ihr liegenden Punkte als *uneigentlich* bezeichnet. Ausdrücke wie „*parallel*" sind dann im üblichen Sinn zu verstehen. Den eigentlichen Teil der affinen Ebene kann man nach [*3*] durch Einführung eines Koordinatensystems folgendermaßen algebraisieren (die hier benutzte Formulierung stammt aus [*10*], S. 35ff.).

Zwei Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt O werden zur x- und y-*Achse* erklärt; ihre uneigentlichen Punkte seien U_0 bzw. U_∞. Außerdem wird noch ein eigentlicher Punkt E, der nicht auf den Achsen liegt, ausgezeichnet. Jeder eigentliche Punkt P der Ebene kann dann eineindeutig festgelegt werden durch sein *Koordinatenpaar* (x_P, y_P), das bestimmt wird durch

$$x_P = (P\,U_\infty \cap O\,E)\,U_0 \cap O\,U_\infty$$
$$y_P = P\,U_0 \cap O\,U_\infty .$$

Die Koordinaten sind also eigentliche Punkte der y-Achse. Ihre Menge soll $\mathfrak{K}$ genannt und nun zu einer algebraischen Struktur gemacht werden. Für die Punkte O und $O\,U_\infty \cap E\,U_0$ wird dabei 0 und 1 geschrieben, die übrigen Elemente aus $\mathfrak{K}$ werden mit kleinen griechischen oder lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Um jede eigentliche Gerade durch eine Gleichung für die Koordinaten ihrer Punkte darstellen zu können, definiert man in $\mathfrak{K}$ eine *ternäre Verknüpfung* $\boldsymbol{T}$ mittels der geometrischen Konstruktionsvorschrift

$$\boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, \alpha) = \{[(\varkappa\,U_0 \cap E\,U_\infty)\,O \cap U_0\,U_\infty]\,\alpha \cap (\xi\,U_0 \cap O\,E)\,U_\infty\}\,U_0 \cap O\,U_\infty .$$

Dann ist die gewünschte Darstellung der eigentlichen Geraden entweder von der Form $y = \boldsymbol{T}(\varkappa, x, \alpha)$ oder, falls es sich um eine Parallele zur y-Achse handelt, von der Form $x = \xi$. Alle Geraden der erstgenannten Art mit festem $\varkappa$ bilden ein Parallelenbüschel, dessen uneigentlicher Punkt mit $U_\varkappa$ bezeichnet wird.

Aus der Definition der Verknüpfung $\boldsymbol{T}$ ergeben sich sofort vier einfache Rechenregeln:

$$\boldsymbol{T}(\varkappa, 1, 0) = \varkappa$$
$$\boldsymbol{T}(1, \xi, 0) = \xi$$
$$\boldsymbol{T}(\varkappa, 0, \alpha) = \alpha = \boldsymbol{T}(0, \xi, \alpha) .$$

Außerdem gilt wegen der Inzidenzaxiome:

Zu vorgegebenem $\varkappa_1, \varkappa_2, \alpha_1, \alpha_2$ *mit* $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ *gibt es genau ein* ξ *mit*

$$\boldsymbol{T}(\varkappa_1, \xi, \alpha_1) = \boldsymbol{T}(\varkappa_2, \xi, \alpha_2);$$

zu vorgegebenem $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ *mit* $\xi_1 \neq \xi_2$ *gibt es genau ein Paar* $\varkappa, \alpha$ *mit*

$$\begin{cases} \eta_1 = \boldsymbol{T}(\varkappa, \xi_1, \alpha) \\ \eta_2 = \boldsymbol{T}(\varkappa, \xi_2, \alpha); \end{cases}$$

zu vorgegebenem $\eta, \varkappa, \xi$ *gibt es genau ein* α *mit*

$$\eta = \boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, \alpha) .$$

$\mathfrak{R}$ wird jetzt als der auf O, U_0, U_∞, E bezogene *Ternärkörper* der Ebene bezeichnet. Isomorphie zwischen den Ternärkörpern einer Ebene braucht im allgemeinen nicht zu bestehen.

Man erklärt weiter zwei binäre Verknüpfungen, Addition und Multiplikation genannt, als Sonderfälle der ternären Verknüpfung $\boldsymbol{T}$.

Definition der Addition: $\xi + \alpha = \boldsymbol{T}(1, \xi, \alpha)$. Die Elemente aus $\mathfrak{R}$ bilden bezüglich der Addition eine Loop mit dem neutralen Element 0.

Definition der Multiplikation: $\varkappa\xi = \boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, 0)$. Die von 0 verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{R}$ bilden bezüglich dieser Multiplikation eine Loop mit dem neutralen Element 1, und alle Elemente erfüllen die Gleichung $0x = x0 = 0$.

Ein mit $\boldsymbol{T}$ gebildeter Term soll *zerlegbar* genannt werden, wenn sich die Verknüpfung der Argumente auch mittels Addition und Multiplikation ausdrücken läßt. Insbesondere soll unter *Hauptzerlegbarkeit* eine Aussage der Form

$$\boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, \alpha) = \varkappa\xi + \alpha$$

und unter *Nebenzerlegbarkeit* eine Aussage von einer der Formen

$$\boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, \varkappa\alpha) = \varkappa(\xi + \alpha) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, \alpha\xi) = (\varkappa + \alpha)\xi$$

verstanden werden.

§ 2. Potenzsummen

Von jetzt ab wird von der betrachteten Ebene vorausgesetzt, daß sie eine *Anti-*FANO*-Ebene* ist. Diese Eigenschaft, auf die im folgenden mit der Abkürzung (AF) verwiesen wird, besagt (Fig. 1):

Wenn für sieben verschiedene Geraden $I, \ldots, VII$ *und sieben verschiedene Punkte* $P_1, \ldots, P_7$ *die Inzidenzen*

I	P_1	P_2	P_3
II	P_1	P_4	P_5
III	P_1	P_6	P_7
IV	P_2	P_4	P_7
V	P_2	P_5	P_6
VI	P_3	P_4	P_6
VII	P_3	P_5	

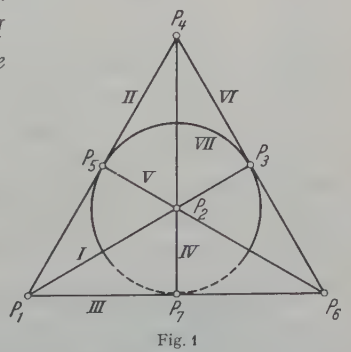


Fig. 1

gelten, dann besteht auch die Inzidenz $P_7 \in VII$. (Für das nichtausgeartete Viereck mit den Ecken P_1, P_2, P_4, P_6 bedeutet das die Kollinearität seiner Diagonalpunkte P_3, P_5, P_7.)

Aus Vierecken, die eine ausgezeichnete Lage bezüglich des Koordinatensystems besitzen, kann man leicht auch ohne Benutzung dieses allgemeinen Schemas Rechenregeln für *Anti-*FANO*-Ternärkörper* gewinnen. Sc äußert sich bei einem Parallelogramm die Eigenschaft (AF) darin, daß die Diagonalen

auch parallel sind, und das läßt sich bei einem solchen Parallelogramm, dessen eines Seitenpaar aus den Geraden $x=\xi$ und $x=\eta$ besteht, sofort algebraisch ausdrücken:

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} & \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\gamma) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\beta)=\boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\delta) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\delta) \end{array}\right. \\ \textit{folgt} & \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\beta)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\gamma). \end{array}$$

(Damit ein nichtausgeartetes Parallelogramm vorlag, war für die Herleitung dieser Rechenregel die Voraussetzung $\xi\neq\eta$, $\varkappa\neq\lambda$ zu machen, die sich nachträglich als überflüssig herausstellt.) Durch Spezialisierung ergeben sich übersichtlichere Regeln. Man erhält zunächst mit $\lambda=0$:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \textit{Aus} & \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\beta) \\ \textit{folgt} & \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\beta)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\alpha). \end{array}\right.$$

Daraus weiter mit $\xi=0$:

$$(3)\qquad \textit{Aus}\quad \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\alpha)=\beta \quad \textit{folgt} \quad \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\beta)=\alpha.$$

Also insbesondere mit $\alpha=0$:

$$(4)\qquad \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\varkappa\eta)=0.$$

Unter Berücksichtigung von (4) bekommt man aus (2) mit $\beta=\varkappa\xi$:

$$(5)\qquad \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\varkappa\xi)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\varkappa\eta).$$

Aus (1) erhält man mit $\xi=0$:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \textit{Aus} & \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\beta) \\ \textit{folgt} & \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\beta)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\alpha). \end{array}\right.$$

Das liefert mit $\beta=\lambda\eta$ unter Berücksichtigung von (4):

$$(7)\qquad \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\lambda\eta)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\varkappa\eta).$$

Die Ähnlichkeit, die zwischen den Formeln (2) und (6) sowie zwischen deren Sonderfällen (5) und (7) besteht, gibt Anlaß zu folgender Definition. Zwei Rechenregeln eines Anti-FANO-Ternärkörpers sollen *dual* zueinander heißen, wenn die eine aus der andern dadurch hervorgeht, daß in jedem $\boldsymbol{T}$-Term das erste mit dem zweiten Argument vertauscht wird. Dabei soll eine Summe *nicht* als spezieller $\boldsymbol{T}$-Term aufgefaßt werden, wohl aber ein Produkt gemäß der Definition der Multiplikation, so daß seine Faktoren auch zu vertauschen sind. (Im Anschluß an die Vertauschung ist natürlich eine Bezeichnungsänderung der Variablen zugelassen.) — *Dann lassen sich aus dualen Voraussetzungen duale Folgerungen ziehen, sofern während der Rechnung*

nur solche Eigenschaften von $\boldsymbol{T}$ *benutzt werden, deren Dualisierungen ebenfalls Eigenschaften von* $\boldsymbol{T}$ *sind, also insbesondere von der Definitionsgleichung der Addition kein Gebrauch gemacht wird.*

Zu der Regel (1) läßt sich das duale Gegenstück beweisen:

$$(8)\qquad \begin{array}{ll} \textit{Aus} & \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\gamma) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\beta)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\delta) \\ \boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\delta) \end{array}\right. \\ \textit{folgt} & \boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\beta)=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\gamma)\,. \end{array}$$

Beweis. Mit geänderter Bezeichnung der dritten Argumente lautet (1):

$$\begin{array}{ll} \textit{Aus} & \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\pi)=\beta=\boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\sigma) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\varrho)=\alpha=\boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\tau) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\pi)=\delta=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\tau) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\varrho)=\gamma \end{array}\right. \\ \textit{folgt} & \gamma=\boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\sigma)\,. \end{array}$$

Durch Anwendung von (3) auf alle $\boldsymbol{T}$-Terme läßt sich dies in (8) umwandeln.

Satz 1. *Für alle Anti-*FANO*-Ternärkörper gilt:*
Jedes Element genügt der Gleichung $x+x=0$;
die Addition ist kommutativ und assoziativ;
jedes Element der multiplikativen Loop hat ein Inverses;
die Multiplikation ist potenzassoziativ.

Beweis. Die Gleichung $x+x=0$ geht aus (4) dadurch hervor, daß dort $\varkappa=1$ genommen wird. Wenn man auch in (5) $\varkappa=1$ setzt, erhält man sofort die Kommutativität der Addition aller Ternärkörper, woraus nach [*1*] auch die Assoziativität folgt. In der Sprache der Gewebetheorie bedeutet kommutative Addition, daß die „THOMSEN-*Figur für jedes 3-Gewebe mit kollinearen Trägerpunkten*" geschlossen ist (vgl. [*10*], S. 59). Die dazu geometrisch duale Aussage, daß die „*Sechseck-Bedingung für jedes 3-Gewebe mit beliebigen Trägerpunkten*" erfüllt ist (vgl. [*10*], S. 54 und 154), gilt demnach auch, weil die Eigenschaft (AF) geometrisch selbstdual ist. Das liefert nach [*2*] und [*10*], S. 244, gerade die Behauptungen über die Multiplikation. (Bei den beiden zuletzt genannten Schließungssätzen handelt es sich um die „*kleinen Sätze von* PAPPOS".)

Auf die Gültigkeit der Sechseck-Bedingung wird später noch mehrfach Bezug genommen. Sie lautet ausführlich (Fig. 2):

Es seien drei verschiedene (Träger-) Punkte Q_1, Q_2, Q_3 *gegeben, ferner neun verschiedene Geraden* $I, \ldots, IX$, *von denen jede durch genau einen der Punkte* Q_i *geht, und zwar die ersten drei durch* Q_1, *die nächsten drei*

durch Q_2 und die letzten drei durch Q_3. Wenn dann für diese Geraden und sieben Punkte $P_0, \ldots, P_6$ die Inzidenzen

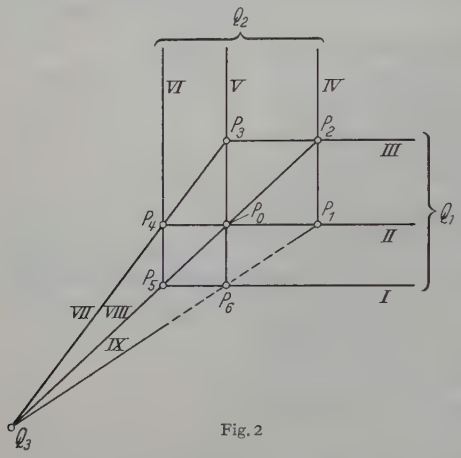


Fig. 2

I	$P_6\ P_5$
II	$P_1\ P_4\ P_0$
III	$P_2\ P_3$
IV	$P_2\ P_1$
V	$P_3\ P_6\ P_0$
VI	$P_4\ P_5$
VII	$P_4\ P_3$
$VIII$	$P_5\ P_2\ P_0$
IX	P_1

gelten, dann besteht auch die Inzidenz $P_6 \in IX$. (Diese Folgerung ist trivial im Entartungsfall $I = II = III$, $IV = V = VI$, $VII = VIII = IX$.)

In den Anwendungen werden stets Q_1 und Q_2 uneigentliche Punkte, Q_3 ein eigentlicher Punkt sein.

Nach Satz 1 kann man mit einem von 0 und 1 verschiedenen *erzeugenden Element* a aus $\mathfrak{R}$ und ganzen Zahlen e_i *Potenzsummen* bilden, d.h. Ausdrücke der Form

$$a^{e_1} + a^{e_2} + \cdots + a^{e_s}. \tag{9}$$

Bei dieser Schreibweise soll, falls die Summe überhaupt aus mehr als einem Glied besteht, stets $e_1 < e_2 < \cdots < e_s$ sein. Für eine solche a-Potenzsumme wird auch $\sum_\nu \delta_\nu a^\nu$ geschrieben, womit gemeint ist, daß der Index ν von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft und endlich viele der Koeffizienten δ_ν gleich 1, die übrigen gleich 0 sind.

Läßt sich ein Element f aus $\mathfrak{R}$ als Potenzsumme (9) darstellen, so soll die maximale Exponentendifferenz deren *Länge* genannt werden:

$$Lg\, f = e_s - e_1. \tag{10}$$

Die Länge ist also eine nichtnegative ganze Zahl. Sie braucht durch das Ternärkörperelement f nicht eindeutig bestimmt zu sein, da möglicherweise die Darstellung als a-Potenzsumme in verschiedener Form erfolgen kann. Wo aber später mit (10) gearbeitet wird, ist immer klar erkennbar, auf welche Darstellung Bezug genommen wird. — Der Potenzsumme, die aus null Gliedern besteht, wird keine Länge zugeordnet, doch soll verabredet werden, daß diese leere Potenzsumme jede Bedingung $Lg\, f < n$ erfüllt.

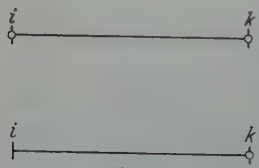


Fig. 3

Die verwendeten schematischen Darstellungen sind folgendermaßen zu verstehen:

In Fig. 3 bedeutet das obere Zeichen eine Potenzsumme $a^i + \cdots + a^k$ $(i \leqq k)$, das untere Zeichen eine Potenzsumme $\delta a^i + \cdots + a^k$ ($\delta = 0$ oder 1), d.h. die Potenz a^k tritt tatsächlich auf, und die Länge ist höchstens gleich $k - i$. Über etwaige Zwischenglieder wird in beiden Fällen nichts ausgesagt.

Die Buchstaben f, g, h, p, q werden im folgenden ausschließlich zur Bezeichnung von a-Potenzsummen verwendet.

§ 3. Multiplikation der Potenzsummen

Mit der Regel (1) und ihren Sonderfällen wird jetzt wiederholt die Zerlegbarkeit spezieller $\boldsymbol{T}$-Terme bewiesen. Dabei geschieht die Anwendung von (1) immer wie folgt: In den ersten drei Zeilen werden links und rechts Terme eingesetzt, für welche die Zerlegbarkeit schon bekannt ist (z.B. auf Grund einer Induktionsvoraussetzung), so daß die Richtigkeit dieser Gleichungen nachgeprüft werden kann. Ferner wird auch in der vierten Zeile rechts ein zerlegbarer Term eingesetzt. Damit gewinnt man dann die Zerlegbarkeit der linken Seite der letzten Zeile. – Entsprechend wird etwa die Regel (2) benutzt.

Als erstes Ergebnis wird nach diesem Verfahren die Hauptzerlegbarkeit

$$\boldsymbol{T}(a^\mu, a^{k-\mu}, h) = a^k + h \tag{11}$$

hergeleitet; dabei seien μ und k ganze Zahlen und $h = a^s + \cdots + a^t$.

Beweis. Es genügt die Betrachtung nichtnegativer Exponenten μ, da sich diese Form des $\boldsymbol{T}$-Terms notfalls durch Einführung eines neuen erzeugenden Elements $\bar{a} = a^{-1}$ und Übergang zu $\bar{a}$-Potenzen und $\bar{a}$-Potenzsummen herstellen läßt. – Die Behauptung ist nach der Definition der Addition richtig für $\mu = 0$.

Erste Induktionsannahme. Die Behauptung sei schon als richtig erkannt für $\mu < m\,(> 0)$. Sie soll nun für $\mu = m$ bewiesen werden. Man definiert als *Überhang von h über a^k* eine ganze Zahl $\varrho \geqq 0$ durch

$$\varrho = \operatorname{Max}(t - s, k - s, t - k).$$

Bei $\varrho = 0$ besteht h nur aus der einzigen Potenz a^k; dafür ist nach (4) die Behauptung richtig.

Zweite Induktionsannahme. Die Behauptung (11) sei bei $\mu = m$ schon bewiesen für $\varrho < r\,(> 0)$. Nun soll (11) auch für $\varrho = r$ hergeleitet werden. Dabei werden drei Fälle unterschieden.

Fall A: $t < k$. Hier ist $r = k - s$. Es wird zunächst der Unterfall $r = 1$ behandelt. h besteht dann nur aus der einzigen Potenz a^{k-1}. Man wendet (6) wie folgt an, bestätigt die erste Gleichung mit (4) und kann in der Schlußgleichung den rechten Term wegen der ersten Induktionsvoraussetzung zerlegen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, a^k) &= \boldsymbol{T}(a^{m-1}, a^{k-m}, a^{k-1}) = 0 \\ \boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, a^{k-1}) &= \boldsymbol{T}(a^{m-1}, a^{k-m}, a^k) \quad = a^k + a^{k-1}. \end{aligned}$$

Im Unterfall $r>1$ ist (1) folgendermaßen anwendbar:

$$\boldsymbol{T}(a^m, a^{s-m+1}, h + a^k + a^{k-1} + a^{s+1} + a^s) = \boldsymbol{T}(a^{m-1}, a^{s-m+1}, h + a^k + a^{k-1})$$
$$\boldsymbol{T}(a^m, a^{s-m+1}, h) \qquad = \boldsymbol{T}(a^{m-1}, a^{s-m+1}, h + a^{s+1} + a^s)$$
$$\boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, h + a^k + a^{k-1} + a^{s+1} + a^s) \quad = \boldsymbol{T}(a^{m-1}, a^{k-m}, h + a^{s+1} + a^s)$$
$$\boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, h) = \boldsymbol{T}(a^{m-1}, a^{k-m}, h + a^k + a^{k-1}) = a^k + h.$$

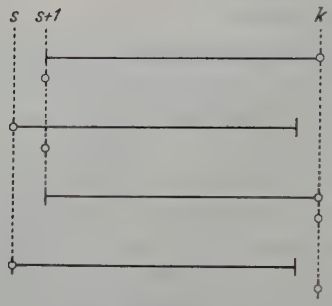


Fig. 4

Rechts fallen alle Terme unter die erste Induktionsvoraussetzung. Links werden in den ersten drei Zeilen die Terme durch die zweite Induktionsvoraussetzung erfaßt, wie man leicht aus dem Schema der Fig. 4 erkennt; in jeder Zeile steht dort das Produkt aus dem ersten und zweiten Argument des jeweiligen Terms unter dem dritten Argument.

Fall B: $t = k$. Hier ist h so beschaffen, daß $h + a^k$ zum Fall A gehört. Man hat deshalb $\boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, h + a^k) = h$ und kann nun gemäß (3) h mit $h + a^k$ vertauschen.

Fall C: $t > k$. Hier kommt man durch Einsetzen passender Größen in (2) zum Ziele:

$$\boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, h + a^t + a^k) = \boldsymbol{T}(a^m, a^{t-m}, h)$$
$$\boldsymbol{T}(a^m, a^{k-m}, h) \qquad = \boldsymbol{T}(a^m, a^{t-m}, h + a^t + a^k) = a^k + h.$$

Für den rechten Term der oberen Gleichung (erste Zeile des Schemas Fig. 5) ist der Überhang von h über a^t maßgebend; bei $s \leqq k$ ist dieser gleich r (der Term fällt dann unter Fall B), bei $s > k$ ist er kleiner als r. — Für den rechten Term der unteren Gleichung (zweite Zeile des Schemas) ist der Überhang von $h + a^t + a^k$ über a^t bei $s < k$ und bei $s > k$ gleich r (der Term fällt dann unter Fall A), bei $s = k$ kleiner als r. — Für den linken Term der oberen Gleichung (dritte Zeile des Schemas) ist der Überhang von $h + a^t + a^k$ über a^k offenbar kleiner als der Überhang von h über a^k, also kleiner als r.

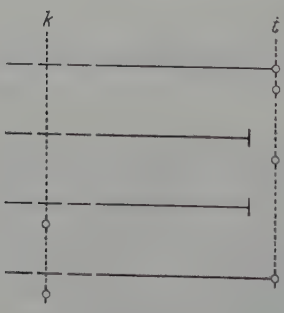


Fig. 5

Damit ist (11) vollständig bewiesen. Verallgemeinerungen dieser Formel hängen bereits mit Distributivitäts-Aussagen zusammen.

$$a^\mu g \equiv a^\mu \sum_\nu \delta_\nu a^{\nu-\mu} = \sum_\nu \delta_\nu a^\nu, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{T}(a^\mu, g, h) = a^\mu g + h. \tag{13}$$

Beweis. Es genügt wieder die Betrachtung nichtnegativer Exponenten μ. Die beiden Behauptungen sind richtig für $Lg\, g = 0$, denn (13) hat dann die Form (11).

Erste Induktionsannahme. (12) und (13) seien schon bewiesen für alle g mit $Lg\, g < n$ (> 0). Es soll nun zunächst das Distributivgesetz (12) auch für $Lg\, g = n$ hergeleitet werden. Bei $\mu = 0$ ist nichts zu beweisen.

Zweite Induktionsannahme. (12) sei bei $Lg\, g = n$ bereits als richtig nachgewiesen für $0 \leq \mu < m$. Es soll nun gezeigt werden, daß dann auch das Produkt $a^m g$ distributiv ausmultiplizierbar ist.

Der Anfang der Potenzsumme g (die mindestens aus zwei Gliedern besteht) möge sein

$$g = a^\sigma + a^\tau + \cdots.$$

Dann wird gesetzt

$$g_1 = \sum_{\nu=\sigma}^{\tau-1} a^\nu.$$

Diese Potenzsumme g_1 hat offenbar eine kleinere Länge als g; man kann daher auf Grund der ersten Induktionsvoraussetzung das Produkt $a g_1$ distributiv ausmultiplizieren und erhält

$$a g_1 = \sum_{\nu=\sigma+1}^{\tau} a^\nu,$$

so daß

$$g_1 + a g_1 = a^\sigma + a^\tau$$

ist. Der noch nicht berücksichtigte Teil von g, der möglicherweise aus null Gliedern besteht, hat eine kleinere Länge als g und kann deshalb nach der ersten Induktionsvoraussetzung als $a g_2$ geschrieben werden. Zu

$$g = g_1 + a g_1 + a g_2 \tag{14}$$

wird nun

$$g^* = g_2 + a g_1 + a g_2 \tag{15}$$

gebildet; dabei gilt, wie man leicht feststellt, $Lg\, g^* < n$.

Man betrachtet jetzt das Parallelogramm, das durch das folgende Inzidenzschema für sieben Geraden und sieben Punkte beschrieben wird.

I	$U_0\ U_\infty$	U_0	$U_{a^{m-1}}$	U_{a^m}
II	$y = 0$	U_0	$(g_1, 0)$	$(g^*, 0)$
III	$y = a^m g_1 + a^m g_2$	U_0	$(g_2, a^m g_1 + a^m g_2)$	$(g, a^m g_1 + a^m g_2)$
IV	$y = \boldsymbol{T}(a^{m-1}, x, a^{m-1} g_1)$	$U_{a^{m-1}}$	$(g_1, 0)$	$(g, a^m g_1 + a^m g_2)$
V	$y = \boldsymbol{T}(a^{m-1}, x, a^{m-1} g^*)$	$U_{a^{m-1}}$	$(g^*, 0)$	$(g_2, a^m g_1 + a^m g_2)$
VI	$y = \boldsymbol{T}(a^m, x, a^m g_1)$	U_{a^m}	$(g_1, 0)$	$(g_2, a^m g_1 + a^m g_2)$
VII	$y = \boldsymbol{T}(a^m, x, a^m g^*)$	U_{a^m}	$(g^*, 0)$	

Von den hierin behaupteten Inzidenzen sind lediglich diejenigen nichttrivial, die in der letzten Spalte ab Zeile IV stehen. Man hat in Zeile IV den Term $\boldsymbol{T}(a^{m-1}, g, a^{m-1} g_1)$ auszuwerten. Zunächst formt man mit (5) um in $\boldsymbol{T}(a^{m-1}, g_1, a^{m-1} g)$, kann nun nach der ersten Induktionsvoraussetzung zerlegen in $a^{m-1} g_1 + a^{m-1} g$ und erhält daraus nach (14) und der zweiten

Induktionsvoraussetzung die behauptete y-Koordinate $a^m g_1 + a^m g_2$. — Bei Zeile V kann man sofort zerlegen und ähnlich wie eben (15) verwenden. — Bei Zeile VI ist ebenfalls der $\boldsymbol{T}$-Term zerlegbar und damit die Inzidenz klar.

Man hat noch zu untersuchen, ob die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von (AF) erfüllt sind. Da die drei uneigentlichen Punkte wegen $a \neq 0, 1$ offenbar voneinander verschieden sind, ist das Parallelogramm genau dann ausgeartet, wenn die Geraden II und III zusammenfallen, also $a^m g_1 = a^m g_2$ gilt. Dann ist $a g_1 + a g_2 = 0$, und man hat nach (14)

$$a^m g = a^m (g_1 + 0) = a^m g_1 + a^m 0 = a^m g_1 + a^m (a g_1 + a g_2).$$

Hier ist aber rechts nach der ersten Induktionsvoraussetzung alles distributiv ausmultiplizierbar, denn gemäß der Definition von g_1 und g_2 gilt $Lg\,(a g_1 + a g_2) < Lg\, g$. — Man braucht daher das Parallelogramm nur im Nichtausartungsfall $a^m g_1 \neq a^m g_2$ heranzuziehen. (AF) liefert dann

$$\boldsymbol{T}(a^m, g, a^m g^*) = a^m g_1 + a^m g_2.$$

Der $\boldsymbol{T}$-Term ist nach Anwendung von (5) zerlegbar. Man erhält schließlich

$$a^m g = a^m g^* + a^m g_1 + a^m g_2.$$

Hier kann man rechts auf Grund der ersten Induktionsvoraussetzung alles distributiv ausmultiplizieren, also auch das Produkt $a^m g$.

Man muß jetzt noch (13) für $Lg\, g = n$ beweisen. Es sei

$$g = a^{i-m} + \cdots + a^{k-m}$$
$$h = a^s + \cdots + a^t.$$

Unter Verwendung dieser Exponenten wird der *Überhang von h über $a^m g$* definiert durch

$$\varrho = \mathrm{Max}\,(t - k + i - s, t - k, i - s, 0).$$

Zuerst wird die Lage bei $\varrho = 0$ betrachtet. Ist $t < k$, so gilt $Lg\, h < Lg\, g = n$, und da man nach dem eben Bewiesenen $h = a^m h'$ schreiben darf, kann man mittels (5) umwandeln und dann wegen $Lg\, h' - Lg\, h < n$ nach der ersten Induktionsvoraussetzung zerlegen:

$$\boldsymbol{T}(a^m, g, h) = \boldsymbol{T}(a^m, h', a^m g) = h + a^m g.$$

Ist aber $t - k$, so hat man nach dem soeben Festgestellten die Zerlegbarkeit von $\boldsymbol{T}(a^m, g, h + a^m g)$, aus der man mit (3) die Zerlegbarkeit von $\boldsymbol{T}(a^m, g, h)$ gewinnt.

Dritte Induktionsannahme. (13) sei bei $Lg\, g = n$ schon als richtig erkannt für $\varrho < r$ (> 0). Nun soll (13) auch für $\varrho = r$ bewiesen werden. Dazu wird wie beim Beweis von (11) eine Fallunterscheidung gemacht.

Fall A $(t < k)$ und Fall B $(t - k)$. Hier wird (2) folgendermaßen verwendet:

$$\boldsymbol{T}(a^m, g, h + a^s + a^m g) = \boldsymbol{T}(a^m, a^{s-m}, h)$$
$$\boldsymbol{T}(a^m, g, h) = \boldsymbol{T}(a^m, a^{s-m}, h + a^s + a^m g) = a^m g + h.$$

Die rechts stehenden Terme sind nach (11) zerlegbar. Das Schema der Fig. 6 bezieht sich auf die linken Gleichungsseiten. Der obere Term fällt unter die dritte Induktionsvoraussetzung: Bei Ersetzung von h durch $h+a^s+a^m g$ wird der Überhang über $a^m g$ am Potenzsummen-Anfang mindestens um 1 erniedrigt, während er von der Änderung am Potenzsummen-Ende unbeeinflußt bleibt.

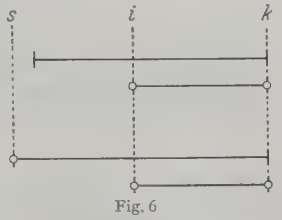


Fig. 6

Fall C ($t > k$) wird wie folgt mit (2) behandelt:

$$\boldsymbol{T}(a^m, g, h + a^t + a^m g) = \boldsymbol{T}(a^m, a^{t-m}, h)$$

$$\boldsymbol{T}(a^m, g, h) \qquad = \boldsymbol{T}(a^m, a^{t-m}, h + a^t + a^m g) = a^m g + h.$$

Die rechts stehenden Terme sind wieder nach (11) zerlegbar. Links (vgl. Fig. 7) fällt der obere Term unter die dritte Induktionsvoraussetzung: Bei Ersetzung von h durch $h - a^t - a^m g$ wird der Überhang über $a^m g$ am Potenzsummen-Ende mindestens um 1 erniedrigt, während er von der Änderung am Potenzsummen-Anfang unbeeinflußt bleibt, ganz gleich, ob der Exponent des Anfangsglieds a^s von h kleiner ist als der Exponent des Anfangsglieds a^t von $a^m g$ oder nicht.

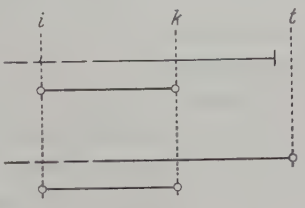


Fig. 7

Damit sind (12) und (13) vollständig bewiesen. Ganz entsprechend läßt sich auch zeigen

$$f a^\mu \equiv \Big(\sum_\nu \delta_\nu a^{\nu-\mu}\Big) a^\mu = \sum_\nu \delta_\nu a^\nu, \tag{16}$$

$$\boldsymbol{T}(f, a^\mu, h) = f a^\mu + h. \tag{17}$$

Man benutzt zum Beweis einfach überall die dualen Formeln, also (7) und (6) an Stelle von (5) und (2). Statt (14), (15) schreibt man jetzt

$$f = f_1 + f_1 a + f_2 a$$

$$f^* = f_2 + f_1 a + f_2 a$$

mit $Lg f_1, Lg f_2, Lg f^* < Lg f$.

An die Stelle des Parallelogramms tritt das folgende Trapez (das man entsprechend dem damals Gesagten nur für $f_1 \neq f_2$, d.h. bei Nichtausartung benötigt).

I	$x = 0$	U_∞	$(0, 0)$	$(0, f_1 a^m + f_2 a^m)$
II	$x = a^{m-1}$	U_∞	$(a^{m-1}, f^* a^{m-1})$	$(a^{m-1}, f_1 a^{m-1})$
III	$x = a^m$	U_∞	$(a^m, f_1 a^m)$	$(a^m, f^* a^m)$
IV	$y = f^* x$	$(0, 0)$	$(a^{m-1}, f^* a^{m-1})$	$(a^m, f^* a^m)$
V	$y = f_1 x$	$(0, 0)$	$(a^{m-1}, f_1 a^{m-1})$	$(a^m, f_1 a^m)$
VI	$y = \boldsymbol{T}(f_2, x, f_1 a^m + f_2 a^m)$	$(0, f_1 a^m + f_2 a^m)$	$(a^{m-1}, f^* a^{m-1})$	$(a^m, f_1 a^m)$
VII	$y = \boldsymbol{T}(f, x, f_1 a^m + f_2 a^m)$	$(0, f_1 a^m + f_2 a^m)$	$(a^{m-1}, f_1 a^{m-1})$	

Die meisten Inzidenzen dieses Schemas sind leicht zu erkennen; die letzte in Zeile *VII* bestätigt man, indem man auf die Gleichung

$$\boldsymbol{T}(f_1, a^{m-1}, f a^{m-1}) = f_1 a^{m-1} + f a^{m-1},$$

die auf Grund der zu machenden Induktionsvoraussetzung gilt, zuerst (7) und dann (3) anwendet. — Nach (AF) folgt daher

$$\boldsymbol{T}(f, a^m, f_1 a^m + f_2 a^m) = f^* a^m.$$

Hier wendet man zuerst (3) und dann (7) an, darf nun zerlegen und erhält schließlich die gewünschte Aussage über die distributive Ausmultiplizierbarkeit:

$$f a^m = f^* a^m + f_1 a^m + f_2 a^m.$$

Der Rest des Beweises von (13) ist ohne Schwierigkeiten zu dualisieren.

Eine gemeinsame Verallgemeinerung von (12), (13) und (16), (17) bilden die Formeln

$$f g \equiv \Big(\sum_{\mu} \delta_\mu a^\mu\Big)\Big(\sum_{\nu} \varepsilon_\nu a^\nu\Big) = \sum_{\mu,\nu} \delta_\mu \varepsilon_\nu a^{\mu+\nu}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{T}(f, g, h) = f g + h. \tag{19}$$

Wegen des bereits Hergeleiteten ist der Beweis nur noch für $Lg\, f$, $Lg\, g > 0$ zu erbringen.

Erste Induktionsannahme. Die beiden Behauptungen seien schon bewiesen für alle f, g mit $Lg\, f - Lg\, g < m$ (> 0). Nun soll zunächst (18) für $Lg\, f + Lg\, g = m$ hergeleitet werden. Da jede der beiden Potenzsummen mindestens zwei Glieder besitzt, kann man in der bekannten Weise setzen

$$\left\{\begin{aligned} f &= f_1 + f_1 a + f_2 a \\ g &= g_1 + a g_1 + a g_2 \\ g^* &= g_2 + a g_1 + a g_2 \end{aligned}\right. \tag{20}$$

mit

$$Lg f_1, Lg f_2 < Lg f$$

und

$$Lg g_1, Lg g_2, Lg g^* < Lg g.$$

Man betrachtet nun das folgende Parallelogramm

I	U_0 U_∞			
II	$y = \boldsymbol{T}(f_1, x, f_1 g^*)$		U_{f_1} U_{f_2}	U_f
III	$y = \boldsymbol{T}(f_1, x, f_2 g + f_2 g_1 + f_1 g_2)$		U_{f_1} $(g_1, f_1 g^* + f_1 g_1)$	$(g^*, 0)$
IV	$y = \boldsymbol{T}(f_2, x, f_1 g^* + f_2 g_1 + f_1 g_2)$		U_{f_1} $(g_2, f_2 g + f_2 g_1)$	$(g, f g_1 + f g_2)$
V	$y = \boldsymbol{T}(f_2, x, f_2 g^*)$		U_{f_2} $(g_1, f_1 g^* + f_1 g_1)$	$(g, f g_1 + f g_2)$
VI	$y = \boldsymbol{T}(f, x, f g_1 + f_1 g^* + f_1 g_1)$		U_{f_2} $(g^*, 0)$	$(g_2, f_2 g + f_2 g_1)$
VII	$y = \boldsymbol{T}(f, x, f g^*)$		U_f $(g_1, f_1 g^* + f_1 g_1)$	$(g_2, f_2 g + f_2 g_1)$
			U_f $(g^*, 0)$	

Die Fälle, in denen die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von (AF) nicht erfüllt sind, werden vorher gesondert untersucht. Aus dem Zusammen-

fallen zweier uneigentlicher Punkte folgt mit (20) $f = f_1 = f_2$; dann ist

$$fg = (f_1 + 0)\,g = f_1 g - 0\,g = f_1 g + (f_1 a + f_2 a)\,g,$$

also distributiv ausmultiplizierbar wegen $Lg\,(f_1 a + f_2 a) < Lg\,f$. — Falls die uneigentlichen Punkte verschieden sind, also $f_1 \neq f_2$ gilt, so ist das Parallelogramm genau dann ausgeartet, wenn die Geraden *II* und *III* zusammenfallen. Dann ist

$$f_1 (g^* - g_2) - f_2 (g + g_1),$$

also

$$f_1 (a\,g_1 + a\,g_2) = f_2 (a\,g_1 + a\,g_2)$$

und deshalb $a\,g_1 + a\,g_2 = 0$. Daher kann man

$$fg = f(g_1 + 0) = fg_1 + f0 = fg_1 + f(a\,g_1 + a\,g_2)$$

wegen $Lg\,(a\,g_1 + a\,g_2) < Lg\,g$ distributiv ausmultiplizieren. — Das Parallelogramm wird demnach nur bei Nichtausartung benötigt.

Die Zerlegbarkeit ist überall durch die Induktionsvoraussetzung gesichert. Die Bestätigung der Inzidenzen erfordert lediglich in der rechten Spalte etwas Umrechnung. Man hat dafür unter Ausnutzung von (20) die Richtigkeit folgender Identitäten festzustellen.

Für Zeile *III*: $f_1 g - f_2 g + f_2 g_1 - f_1 g_2 = fg_1 - fg_2$.
Für Zeile *IV*: $f_2 g + f_1 g^* + f_2 g_1 + f_1 g_1 = fg_1 + fg_2$.
Für Zeile *V*: $f_2 g_2 + f_2 g^* = f_2 g + f_2 g_1$.
Für Zeile *VI*: $fg_2 + fg_1 + f_1 g^* + f_1 g_1 = f_2 g + f_2 g_1$.

Dann bekommt man gemäß (AF)

$$\boldsymbol{T}(f, g, fg^*) = fg_1 + fg_2.$$

Nach Anwendung von (5) auf den $\boldsymbol{T}$-Term darf man zerlegen und erhält schließlich die Gleichung

$$fg = fg^* + fg_1 + fg_2,$$

in der sich rechts nach der Induktionsvoraussetzung alle Produkte distributiv ausmultiplizieren lassen, was demnach auch für das Produkt fg zutrifft.

Damit ist (18) auch für $Lg\,f + Lg\,g = m$ als richtig erkannt. Von dieser Distributivität wird bei dem anschließenden Beweis von (19), der nun noch für $Lg\,f + Lg\,g = m$ zu erbringen ist, Gebrauch gemacht. — Es sei

$$f = a^i + \cdots + a^j$$
$$g = a^k + \cdots + a^l$$
$$h = a^s + \cdots + a^t.$$

Als Überhang von h über $a^j g$ ergibt sich

$$\varrho = \mathrm{Max}\,(t - (j + l) + (j + k) - s,\ t - (j + l),\ (j + k) - s,\ 0).$$

Bei $\varrho = 0$ ist $\quad t - j - l \leqq 0$

und $\quad j + k - s \leqq 0,$

also $\quad Lg\, h = t - s \leqq l - k = Lg\, g.$

Man betrachtet nun, um die Behauptung für $\varrho = 0$ zu beweisen, zuerst den Fall $t = j + l$. Dann gilt nach dem eben Bemerkten

$$Lg\,(g - h\,a^{-j}) < Lg\, g.$$

Ferner ist offenbar

$$(21) \qquad \begin{cases} Lg\,(f + a^j) < Lg\, f \\ Lg\,(g + a^l) \geqq Lg\, g. \end{cases}$$

Daher kann man (8) auf Grund der ersten Induktionsvoraussetzung folgendermaßen anwenden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(f + a^j, g, 0) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g + h\,a^{-j}, h + f\,h\,a^{-j}) \\ \boldsymbol{T}(f + a^j, g, h) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g + h\,a^{-j}, f\,h\,a^{-j}) \\ \boldsymbol{T}(f, g, 0) &= \boldsymbol{T}(f, g + h\,a^{-j}, f\,h\,a^{-j}) \\ \hline \boldsymbol{T}(f, g, h) &= \boldsymbol{T}(f, g + h\,a^{-j}, h + f\,h\,a^{-j}) = f\,g + h. \end{aligned}$$

Für den Fall $t < j + l$ zieht man die Potenzsumme $h + a^{j-l}$ heran. Sie ordnet sich dem eben Erledigten unter und gewährleistet bei der folgenden Anwendung von (8) die Zerlegbarkeit des linken Terms der dritten Zeile, während man an den andern erforderlichen Stellen wegen (21) auf Grund der Induktionsvoraussetzung zerlegen kann.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(f + a^j, g, h + a^{j+l}) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g + a^l, h + f\,a^l) \\ \boldsymbol{T}(f + a^j, g, h) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g + a^l, h + f\,a^l + a^{j+l}) \\ \boldsymbol{T}(f, g, h + a^{j+l}) &= \boldsymbol{T}(f, g + a^l, h + f\,a^l + a^{j+l}) \\ \hline \boldsymbol{T}(f, g, h) &= \boldsymbol{T}(f, g + a^l, h + f\,a^l) = f\,g + h. \end{aligned}$$

Demnach ist (19) bei $Lg\, f + Lg\, g = m$ für $\varrho = 0$ richtig.

Zweite Induktionsannahme. (19) sei bei $Lg\, f + Lg\, g = m$ bereits für $\varrho < r\ (> 0)$ hergeleitet. Nun soll (19) auch für $\varrho = r$ bewiesen werden. Es wird wieder die übliche Fallunterscheidung gemacht und (1) angewendet.

Fall A und B ($t \leqq j + l$). In dem folgenden Gleichungssystem kann man den linken Term der dritten Zeile nach der zweiten Induktionsvoraussetzung zerlegen, weil bei Ersetzung von h durch $h + a^j g + a^s$ der Überhang über $a^j g$ am Potenzsummen-Anfang mindestens um 1 erniedrigt wird, während er von der Änderung am Potenzsummen-Ende nicht beeinflußt wird. Die sonst benötigten Zerlegbarkeiten sind wegen (21) durch die erste Induktionsvoraussetzung oder schon durch (17) gesichert.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(f, a^{s-j}, h + a^j g + a^s) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, a^{s-j}, h + a^j g) \\ \boldsymbol{T}(f, a^{s-j}, h) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, a^{s-j}, h + a^s) \\ \boldsymbol{T}(f, g, h + a^j g + a^s) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g, h + a^s) \\ \hline \boldsymbol{T}(f, g, h) &= T(f + a^j, g, h + a^j g) = f\,g + h. \end{aligned}$$

Der Fall C $(t > j+l)$ ist zu erledigen mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(f, a^{t-j}, h + a^j g + a^t) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, a^{t-j}, h + a^j g)\\
\boldsymbol{T}(f, a^{t-j}, h) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, a^{t-j}, h + a^t)\\
\boldsymbol{T}(f, g, h + a^j g + a^t) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g, h + a^t)\\
\boldsymbol{T}(f, g, h) &= \boldsymbol{T}(f + a^j, g, h + a^j g) = fg + h.
\end{aligned}$$

Der linke Term der dritten Zeile fällt unter die zweite Induktionsvoraussetzung, weil bei Ersetzung von h durch $h + a^j g + a^t$ der Überhang über $a^j g$ am Potenzsummen-Ende mindestens um 1 erniedrigt wird, während er von der Änderung am Potenzsummen-Anfang unbeeinflußt bleibt, gleichgültig, ob der Exponent s kleiner ist als der Exponent $j+k$ oder nicht. Die übrigen sechs benötigten Zerlegbarkeiten liefert die erste Induktionsvoraussetzung oder schon (17).

Damit ist der Induktionsbeweis von (18) und (19) beendet. Mit (18) ist aber gezeigt, daß der Bereich aller Elemente aus $\mathfrak{R}$, die durch a-Potenzsummen darstellbar sind, bezüglich der Addition und Multiplikation von $\mathfrak{R}$ einen kommutativen Ring bildet. Da es in $\mathfrak{R}$ keine Nullteiler gibt, hat man so den

Satz 2. *In einem Anti-*FANO*-Ternärkörper ist der Bereich aller Potenzsummen eines Elementes $a \neq 0$ ein Integritätsbereich.*

Endliche Integritätsbereiche sind Körper. Die in der Einleitung ausgesprochene Behauptung (β) ist daher bereits für den Fall bewiesen, daß die dort erwähnte Unterebene endlich ist. Algebraisch bedeutet das:

Satz 3. *Jeder endliche Anti-*FANO*-Ternärkörper, der von einem Element erzeugt wird, ist ein Körper der Charakteristik 2.*

Im folgenden wird deshalb nur noch der Fall betrachtet, daß der Integritätsbereich der a-Potenzsummen unendlich ist. Dann gibt es für jedes Element aus $\mathfrak{R}$ höchstens eine Darstellung als a-Potenzsumme. Aus zwei formal verschiedenen Darstellungen eines Elements folgt nämlich eine Gleichung

$$a^i + \cdots + a^k = 0;$$

dabei hat diese Potenzsumme wegen $a \neq 0, 1$ mindestens zwei Glieder mit Exponenten $i \leqq k-2$. Durch Multiplikation mit passenden a-Potenzen erhält man daraus

$$a^{-1} = \delta_n a^0 + \cdots + \delta_1 a^{n-1} + a^n, \tag{22}$$

$$a^{n+1} = 1 + \cdots + \delta_1 a^n, \tag{23}$$

mit $\delta_\nu = 0$ oder 1 und $n \geqq 1$. Aus (22) entnimmt man, daß sich jede a-Potenz mit negativem Exponenten auf Potenzen mit nichtnegativen Exponenten zurückführen läßt, und nach (23) kann man jede a-Potenz mit einem Exponenten $> n$ ausdrücken durch eine Potenzsumme mit Exponenten zwischen 0 und n. Von diesen gibt es aber nur endlich viele.

Von jetzt an ist wegen der Eindeutigkeit der Darstellung jede a-Potenzsumme f mit $Lg\, f \geqq 0$ verschieden von dem Ternärkörper-Element 0, so daß f nach Satz 1 ein Inverses $1/f$ besitzt. Andererseits wird für die nun herzuleitenden Rechenregeln, in denen ein Ausdruck $1/f$ vorkommt, grundsätzlich $f \neq 0$ vorausgesetzt, ohne daß es dort ausdrücklich erwähnt wird.

§4. Kürzungsregeln

Mit den Methoden des § 3 lassen sich auch die Linkskürzungsregel

$$\frac{1}{f}(f a^{\mu}) = a^{\mu} \tag{24}$$

und die Nebenzerlegbarkeit

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f a^{\mu} + h, a^{\mu}\right) = \frac{1}{f} h, \tag{25}$$

die man nach (3) auch in der gleichwertigen Form

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f a^{\mu} + h, \frac{1}{f} h\right) = a^{\mu} \tag{25'}$$

schreiben kann, sowie deren Verallgemeinerungen

$$\frac{1}{f}(f g) = g, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f g + h, g\right) = \frac{1}{f} h, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f g + h, \frac{1}{f} h\right) = g \tag{27'}$$

beweisen. Man hat dazu nur die Ecken der bei der Herleitung von (16), (17), (18), (19) benutzten Vierecke der Abbildung $(\xi, \eta) \to (\eta, \xi)$ zu unterwerfen. Auf die Beweise wird an späterer Stelle noch Bezug genommen; sie sollen deshalb in aller Ausführlichkeit dargestellt werden, obwohl nichts wesentlich Neues hinzukommt.

An Stelle des bei (1) betrachteten Parallelogramms wird hier ein solches verwendet, dessen eines Seitenpaar aus den Geraden $y = \alpha$ und $y = \beta$ besteht; wenn dann außerdem keine Seite oder Diagonale parallel zur y-Achse ist [weil diese Parallelität ja nur die schon bekannte Regel (2) liefern würde], läßt sich (AF) ausdrücken durch folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \textit{Aus} \\ \textit{folgt} \end{array} \quad \frac{\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{T}(\varkappa, \xi, \varphi) = \boldsymbol{T}(\varkappa, \eta, \psi) = \boldsymbol{T}(\lambda, \xi, \varrho) = \boldsymbol{T}(\lambda, \eta, \sigma) = \alpha \\ \boldsymbol{T}(\varkappa, \zeta, \varphi) = \boldsymbol{T}(\varkappa, \vartheta, \psi) = \boldsymbol{T}(\lambda, \vartheta, \varrho) = \beta \end{array}\right.}{\boldsymbol{T}(\lambda, \zeta, \sigma) = \beta.}$$

(Damit ein nichtausgeartetes Parallelogramm vorlag, war für die Herleitung die Voraussetzung $0 \neq \varkappa \neq \lambda \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ zu machen, die sich nachträglich als überflüssig herausstellt.) Wendet man auf alle Terme (3) an, so bekommt

diese Rechenregel die an (1) erinnernde Form:

$$(28)\qquad \begin{array}{ll} & \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\zeta,\beta) \\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\varkappa,\vartheta,\beta) \\ \boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\lambda,\vartheta,\beta) \end{array}\right. \\ \textit{folgt} & \boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\lambda,\zeta,\beta). \end{array}$$

Da man hier offenbar jede der vier Gleichungen als Folgerung aus den drei andern ansehen kann, erhält man mit $\zeta=0=\alpha$ unter Berücksichtigung von (3) die Regel:

$$(29)\qquad \textit{Von den Gleichungen}\quad \left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{T}(\varkappa,\vartheta,\varkappa\eta)=\beta \\ \boldsymbol{T}(\lambda,\vartheta,\lambda\xi)=\beta \\ \varkappa\xi=\beta \\ \lambda\eta=\beta \end{array}\right.$$

folgt aus je dreien die vierte.

Der Beweis von (24) und (25) ist nur für $\mu\geqq 0$ erforderlich, da man notfalls zu dem erzeugenden Element $\bar{a}=a^{-1}$ übergehen kann. — Die Behauptungen sind richtig für $Lg\,f=0$.

Erste Induktionsannahme. (24) und (25) seien bereits als richtig erkannt für alle f mit $Lg\,f<n\ (>0)$. Es soll nun für $Lg\,f=n$ zunächst (24) hergeleitet werden. Für $\mu=0$ ist nichts zu beweisen.

Zweite Induktionsannahme. (24) sei bei $Lg\,f=n$ schon als richtig erkannt für $0\leqq\mu<m$. Es folgt nun der Beweis für $\mu=m$. Dazu setzt man gemäß (14), (15)

$$f=f_1+f_1a+f_2a,$$
$$f^*=f_2+f_1a+f_2a$$

mit $Lg\,f_1$, $Lg\,f_2$, $Lg\,f^*<Lg\,f$. — Es sind nun die beiden Fälle $f_2\neq 0$ und $f_2=0$ zu unterscheiden.

Fall $f_2\neq 0$. Das folgende Trapez ist nichtausgeartet: Erstens sind natürlich I, II, III voneinander verschieden, und zweitens ist $V\neq VI$, weil f_1 und f_2 ihrer Definition gemäß verschiedene a-Potenzen enthalten und die Darstellung durch a-Potenzsummen jetzt eindeutig ist.

I	$y=0$	U_0	$(f_1a^m,0)$	$(f_2a^m,0)$
II	$y=a^{m-1}$	U_0	$(f_1a^{m-1}+f_1a^m,a^{m-1})$	$(f_2a^{m-1}+f_2a^m,a^{m-1})$
III	$y=a^m$	U_0	$(0,a^m)$	$(f^*a^m+f_1a^m,a^m)$
IV	$y=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f^*},x,\frac{1}{f^*}(f_1a^m)\right)$	$(f_1a^m,0)$	$(f_2a^{m-1}+f_2a^m,a^{m-1})$	$(f^*a^m+f_1a^m,a^m)$
V	$y=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1},x,a^m\right)$	$(f_1a^m,0)$	$(f_1a^{m-1}+f_1a^m,a^{m-1})$	$(0,a^m)$
VI	$y=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_2},x,a^m\right)$	$(f_2a^m,0)$	$(f_2a^{m-1}+f_2a^m,a^{m-1})$	$(0,a^m)$
VII	$y=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},x,\frac{1}{f}(f_2a^m)\right)$	$(f_2a^m,0)$	$(f_1a^{m-1}+f_1a^m,a^{m-1})$	

Die Bestätigung der Inzidenz in Zeile *IV*, Mitte, erfolgt mit

$$f_2 a^{m-1} + f_2 a^m = f^* a^{m-1} + f_1 a^m.$$

Für Zeile *VII*, Mitte, berücksichtigt man zunächst die Identität

$$f_1 a^{m-1} + f_1 a^m = f a^{m-1} + f_2 a^m$$

und zieht dann (29) heran: Es ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_2 a}, f_2 a^m + f a^{m-1}, \frac{1}{f_2 a}(f a^{m-1})\right) = a^{m-1}$$

$$\frac{1}{f}(f a^{m-1}) = a^{m-1}$$

$$\frac{1}{f_2 a}(f_2 a^m) = a^{m-1}.$$

Daher folgt

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f a^{m-1} + f_2 a^m, \frac{1}{f}(f_2 a^m)\right) = a^{m-1},$$

also die behauptete Inzidenz.

(AF) liefert nun wegen $f^* a^m + f_1 a^m = f a^m + f_2 a^m$ die Inzidenz

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f a^m + f_2 a^m, \frac{1}{f}(f_2 a^m)\right) = a^m.$$

Da man außerdem auf Grund der Induktionsvoraussetzung die beiden Gleichungen

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_2}, f_2 a^m + f a^m, \frac{1}{f_2}(f a^m)\right) = a^m$$

$$\frac{1}{f_2}(f_2 a^m) = a^m$$

zur Verfügung hat, kann man (29) anwenden und bekommt

$$\frac{1}{f}(f a^m) = a^m.$$

Fall $f_2 = 0$. Daß das folgende Trapez nichtausgeartet ist, erkennt man sofort wegen $I \neq II \neq III \neq I$ und $VI \neq VII$.

I	$y = 0$	U_0	$(f_1 a^m, 0)$	$(0, 0)$
II	$y = a^{m-1}$	U_0	$(f a^{m-1}, a^{m-1})$	$(0, a^{m-1})$
III	$y = a^m$	U_0	$(0, a^m)$	$(f a^m, a^m)$
IV	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1 a}, x, a^{m-1}\right)$	$(f_1 a^m, 0)$	$(0, a^{m-1})$	$(f a^m, a^m)$
V	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1}, x, a^m\right)$	$(f_1 a^m, 0)$	$(f a^{m-1}, a^{m-1})$	$(0, a^m)$
VI	$x = 0$	$(0, 0)$	$(0, a^{m-1})$	$(0, a^m)$
VII	$y = \frac{1}{f} x$	$(0, 0)$	$(f a^{m-1}, a^{m-1})$	

Die behaupteten Inzidenzen sind mit der Induktionsvoraussetzung und der Identität $f = f_1 a + f_1$ leicht zu bestätigen. (AF) liefert deshalb auch hier

$$\frac{1}{f}(f a^m) = a^m.$$

Damit ist (24) für $Lg\, f = n$ hergeleitet. Bei dem jetzt folgenden Beweis von (25) kann $h \neq 0$ angenommen werden, da sonst (25′) mit (24) zusammenfällt. Es sei

$$f = a^{i \cdots m} + \cdots + a^{k \cdots m},$$
$$h = a^{s} + \cdots + a^{t}.$$

Der Überhang von h über fa^m ist

$$\varrho = \mathrm{Max}\,(t - k + i - s,\, t - k,\, i - s,\, 0).$$

Man betrachtet zunächst die Lage bei $\varrho = 0$. Falls $t < k$, so gilt

$$Lg\, h a^{-m} = Lg\, h < n = Lg\, f,$$

und man kann (29) anwenden:

$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{ha^{-m}},\ h + fa^m,\ \tfrac{1}{ha^{-m}}(fa^m)\right) = a^m$$
$$\tfrac{1}{f}(fa^m) = a^m$$
$$\tfrac{1}{ha^{-m}} h = a^m$$
$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f},\ fa^m + h,\ \tfrac{1}{f} h\right) = a^m.$$

Falls aber $t = k$, so hat man nach dem soeben Festgestellten (mit $fa^m + h$ an Stelle von h) die Nebenzerlegbarkeit von

$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f},\ fa^m + (fa^m + h),\ \tfrac{1}{f}(fa^m + h)\right),$$

aus der man mit (5) die gewünschte Zerlegbarkeit von $\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f},\ fa^m + h,\ \tfrac{1}{f} h\right)$ gewinnt.

Dritte Induktionsannahme. (25) sei bei $Lg\, f = n$ schon als richtig erkannt für $\varrho < r\ (> 0)$. Nun soll (25) auch für $\varrho = r$ bewiesen werden. Dazu wendet man (28) mit $\beta = 0$ an.

Fall A $(t < k)$ und Fall B $(t = k)$:

$$\boldsymbol{T}(a^{m-s},\ h + a^s,\ a^m) = a^{m-s} h$$
$$\boldsymbol{T}(a^{m-s},\ fa^m + h,\ a^m) = a^{m-s}(h + a^s + fa^m)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f},\ fa^m + (h + a^s + fa^m),\ a^m\right) = \tfrac{1}{f}(h + a^s + fa^m)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f},\ fa^m + h,\ a^m\right) = \tfrac{1}{f} h.$$

Die beiden ersten Gleichungen sind nach (13) richtig; die dritte Gleichung wird von der dritten Induktionsvoraussetzung erfaßt, weil bei Ersetzung von h durch $h + a^s + fa^m$ der Überhang über fa^m nur von der Änderung am Potenzsummen-Anfang beeinflußt (und zwar erniedrigt) wird.

Fall C $(t > k)$:

$$\boldsymbol{T}(a^{m-t}, h + a^t, a^m) = a^{m-t} h$$

$$\boldsymbol{T}(a^{m-t}, f a^m + h, a^m) = a^{m-t}(h + a^t + f a^m)$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f a^m + (h + a^t + f a^m), a^m\right) = \frac{1}{f}(h + a^t + f a^m)$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f a^m + h, a^m\right) = \frac{1}{f} h.$$

Die beiden ersten Gleichungen sind nach (13) richtig; die dritte fällt unter die dritte Induktionsvoraussetzung, weil bei Ersetzung von h durch $h + a^t + f a^m$ der Überhang über $f a^m$ nur von der Änderung am Potenzsummen-Ende beeinflußt wird.

Damit sind (24) und (25) vollständig bewiesen. Man braucht daher bei dem nun folgenden Beweis von (26) und (27) nur solche Fälle zu betrachten, in denen $Lg\, f$, $Lg\, g > 0$ gilt.

Erste Induktionsannahme. (26) und (27) seien schon als richtig erkannt für alle f, g mit $Lg\, f + Lg\, g < m\ (> 0)$. Nun soll zunächst (26) für $Lg\, f + Lg\, g = m$ hergeleitet werden. Man benutzt wieder die Zerlegung (20). Es sind die beiden Fälle $f_2 \neq 0$ und $f_2 = 0$ zu unterscheiden. — Die folgenden Parallelogramme sind nichtausgeartet, weil die drei uneigentlichen Punkte voneinander verschieden sind und außerdem bei den eigentlichen Punkten verschiedene y-Koordinaten vorkommen.

Fall $f_2 \neq 0$.

I	$U_0\, U_\infty$	U_{1/f_1}	U_{1/f_2}	$U_{1/f}$
II	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1}, x, g^*\right)$	U_{1/f_1}	$(f_1 g^* + f_1 g_1, g_1)$	$(0, g^*)$
III	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1}, x, \frac{1}{f_1}(f_2 g + f_2 g_1 + f_1 g_2)\right)$	U_{1/f_1}	$(f_2 g + f_2 g_1, g_2)$	$(f g_1 + f g_2, g)$
IV	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_2}, x, \frac{1}{f_2}(f_1 g^* + f_2 g_1 + f_1 g_1)\right)$	U_{1/f_2}	$(f_1 g^* + f_1 g_1, g_1)$	$(f g_1 + f g_2, g)$
V	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_2}, x, g^*\right)$	U_{1/f_2}	$(0, g^*)$	$(f_2 g + f_2 g_1, g_2)$
VI	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, x, \frac{1}{f}(f g_1 + f_1 g^* + f_1 g_1)\right)$	$U_{1/f}$	$(f_1 g^* + f_1 g_1, g_1)$	$(f_2 g + f_2 g_1, g_2)$
VII	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, x, g^*\right)$	$U_{1/f}$	$(0, g^*)$	

Fall $f_2 = 0$.

I	$U_0\, U_\infty$	U_{1/f_1}	U_∞	$U_{1/f}$
II	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1}, x, g^*\right)$	U_{1/f_1}	$(f_1 g^* + f_1 g_1, g_1)$	$(0, g^*)$
III	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f_1}, x, g_2\right)$	U_{1/f_1}	$(0, g_2)$	$(f g_1 + f g_2, g)$
IV	$x = f_1 g^* + f_1 g_1$	U_∞	$(f_1 g^* + f_1 g_1, g_1)$	$(f g_1 + f g_2, g)$
V	$x = 0$	U_∞	$(0, g^*)$	$(0, g_2)$
VI	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, x, g_2\right)$	$U_{1/f}$	$(f_1 g^* + f_1 g_1, g_1)$	$(0, g_2)$
VII	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, x, g^*\right)$	$U_{1/f}$	$(0, g^*)$	

Bei beiden Parallelogrammen lassen sich die behaupteten Inzidenzen mit der Induktionsvoraussetzung bestätigen, in der letzten Spalte jeweils unter Benutzung der beim Beweis von (18) angegebenen Identitäten. Man bekommt daher gemäß (AF) und nach Anwendung der Identität $g_1 + g_2 = g + g^*$:

$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f}, f g^* + f g, g^*\right) = g.$$

Andererseits ist nach Induktionsvoraussetzung:

$$\boldsymbol{T}\left(\tfrac{1}{f}, f g^* + f g, g^*\right) = \tfrac{1}{f}(f g).$$

Folglich gilt

$$\tfrac{1}{f}(f g) = g.$$

Diese Kürzungsregel wird bei dem anschließenden Beweis von (27), der nun noch für $Lg\, f + Lg\, g = m$ zu erbringen ist, benutzt.

Man verfährt in Anlehnung an den Beweis von (19). Es sei wie dort

$$f = a^i + \cdots + a^j,$$
$$g = a^k + \cdots + a^l,$$
$$h = a^s + \cdots + a^t.$$

[Es kann $h \neq 0$ angenommen werden, da sonst (27′) mit (26) zusammenfällt.]

Als Überhang von h über $a^i g$ ergibt sich

$$\varrho = \operatorname{Max}\big(t - (j + l) + (j + k) - s,\ t - (j + l),\ (j + k) - s,\ 0\big).$$

Bei $\varrho = 0$ ist $\quad t - j - l \leqq 0$

und $\quad j + k - s \leqq 0,$

also $\quad Lg\, h = t - s \leqq l - k = Lg\, g.$

Man betrachtet nun, um die Behauptung für $\varrho = 0$ zu beweisen, zuerst den Fall $t = j + l$. Dann gilt nach dem eben Bemerkten

$$Lg(g + h a^{-j}) < Lg\, g.$$

Ferner ist offenbar

$$\text{(30)} \qquad \begin{cases} Lg(f + a^j) < Lg\, f \\ Lg(g + a^l) < Lg\, g. \end{cases}$$

Daher kann man (28) auf Grund der ersten Induktionsvoraussetzung folgendermaßen anwenden, indem man in der dritten Zeile (4) in Verbindung mit der Kürzungsregel benutzt:

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,g + a^j g, g\right)$$
$$= \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,(g+ha^{-j}) + a^j g, g + ha^{-j}\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,g + a^j g + h, g\right)$$
$$= \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,(g+ha^{-j}) + a^j g + h, g + ha^{-j}\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg, h\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f(g+ha^{-j}), g + ha^{-j}\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg+h, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f(g+ha^{-j}) + h, g + ha^{-j}\right) = \frac{1}{f}\,h.$$

Für den Fall $t<j+l$ zieht man die Potenzsumme $h+a^{j+l}$ heran. Sie ordnet sich dem eben Erledigten unter und gewährleistet in der folgenden Anwendung von (28) die Zerlegbarkeit des linken Terms der dritten Zeile, während man an den andern erforderlichen Stellen wegen (30) auf Grund der Induktionsvoraussetzung zerlegen kann.

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,g + a^j g + h + a^{j+l}, g\right)$$
$$= \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,(g+a^l) + a^j g + h + a^{j+l}, g + a^l\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,g + a^j g + h, g\right)$$
$$= \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,(g+a^l) + a^j g + h, g + a^l\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg + h + a^{j+l}, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f(g+a^l) + h + a^{j+l}, g + a^l\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg+h, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f(g+a^l) + h, g + a^l\right) = \frac{1}{f}\,h.$$

Demnach ist (27) bei $Lg\,f + Lg\,g = m$ für $\varrho = 0$ richtig.

Zweite Induktionsannahme. (27) sei bei $Lg\,f + Lg\,g = m$ bereits für $\varrho < r$ (>0) hergeleitet. Nun soll (27) auch für $\varrho = r$ bewiesen werden. Dazu wird mit der üblichen Fallunterscheidung (28) angewendet.

Fall A und B $(t \leqq j+l)$. In dem folgenden Gleichungssystem kann man den linken Term der dritten Zeile nach der zweiten Induktionsvoraussetzung zerlegen. Die sonst benötigten Zerlegbarkeiten sind durch die erste Induktionsvoraussetzung oder schon durch (25) gesichert.

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,g + h + a^s, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,a^{s-j} + h + a^s, a^{s-j}\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,g + a^j g + h, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j}, (f+a^j)\,a^{s-j} + a^j g + h, a^{s-j}\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg + a^j g + h + a^s, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fa^{s-j} + a^j g + h + a^s, a^{s-j}\right)$$
$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg+h, g\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fa^{s-j} + h, a^{s-j}\right) = \frac{1}{f}\,h.$$

Im Fall C ($t>j+l$) läßt sich die Anwendbarkeit von (28) ebenso begründen.

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j},(f+a^j)\,g+h+a^t,g\right)=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j},(f+a^j)\,a^{t-j}+h+a^t,a^{t-j}\right)$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j},(f+a^j)\,g+a^jg+h,g\right)=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f+a^j},(f+a^j)\,a^{t-j}+a^jg+h,a^{t-j}\right)$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},fg+a^jg+h+a^t,g\right)=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},fa^{t-j}+a^jg+h+a^t,a^{t-j}\right)$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},fg+h,g\right)=\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},fa^{t-j}+h,a^{t-j}\right)=\frac{1}{f}h.$$

Damit sind (26) und (27) vollständig bewiesen. Die dazu dualen Formeln, nämlich die Rechtskürzungsregel

$$(fg)\frac{1}{g}=f \tag{31}$$

und die Nebenzerlegbarkeit

$$\boldsymbol{T}\left(fg+h,\frac{1}{g},f\right)=h\frac{1}{g}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{T}\left(fg+h,\frac{1}{g},h\frac{1}{g}\right)=f, \tag{32'}$$

lassen sich ganz entsprechend herleiten (und zwar wieder auf dem Weg über die Sonderfälle mit $f=a^\mu$). Man gewinnt zunächst die zu (28) duale Regel aus einem Trapez mit den Parallelen $x=0$, $x=\xi$ und $x=\eta$:

$$\left\{\begin{array}{ll} Aus & \left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{T}(\varkappa,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\mu,\xi,\beta)\\ \boldsymbol{T}(\lambda,\xi,\alpha)=\boldsymbol{T}(\nu,\xi,\beta)\\ \boldsymbol{T}(\varkappa,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\nu,\eta,\beta)\end{array}\right.\\ folgt & \boldsymbol{T}(\lambda,\eta,\alpha)=\boldsymbol{T}(\mu,\eta,\beta).\end{array}\right. \tag{33}$$

(Damit ein nichtausgeartetes Trapez vorlag, waren für die Herleitung die Voraussetzungen $0\neq\xi\neq\eta\neq0$, $\alpha\neq\beta$ zu machen, die sich nachträglich als überflüssig herausstellen.) — Was nun die beim Beweis von (24) und (26) benutzten, durch ihr Inzidenzschema gegebenen Vierecke betrifft, so lassen sich die jetzt benötigten Vierecke durch folgende Vorschrift daraus gewinnen [nach welcher übrigens schon das Trapez des Beweises von (16) aus dem Parallelogramm des Beweises von (12) gebildet wurde]: Man ersetze einen eigentlichen Punkt (ξ,η) durch eine Gerade $y=\boldsymbol{T}(\xi,x,\eta)$, einen uneigentlichen Punkt $U_\varkappa$ durch eine Gerade $x=\varkappa$, den Punkt U_∞ durch die Gerade U_0U_∞ und umgekehrt. — Diese kurzen Angaben mögen zum Beweis von (31) und (32) genügen.

Die Kürzungsregeln (26) und (31) lassen sich auch in die Form

$$f\left(\frac{1}{f}g\right)=g, \tag{34}$$

$$\left(g\,\frac{1}{f}\right)f=g \tag{35}$$

bringen. Das geschieht unter Zuhilfenahme der in § 2 erläuterten Sechseckbedingung: Man nimmt mit den Trägerpunkten U_∞, U_0, O für die Linkskürzungsregel das Sechseck

I	$x = \frac{1}{f} g$	$\left(\frac{1}{f} g, g\right)$	$\left(\frac{1}{f} g, \frac{1}{f} g\right)$	
II	$x = g$	(g, fg)	$\left(g, \frac{1}{f} g\right)$	(g, g)
III	$x = fg$	(fg, fg)	(fg, g)	
IV	$y = fg$	(fg, fg)	(g, fg)	
V	$y = g$	(fg, g)	$\left(\frac{1}{f} g, g\right)$	(g, g)
VI	$y = \frac{1}{f} g$	$\left(g, \frac{1}{f} g\right)$	$\left(\frac{1}{f} g, \frac{1}{f} g\right)$	
VII	$y = \frac{1}{f} x$	$\left(g, \frac{1}{f} g\right)$	(fg, g)	
$VIII$	$y = x$	$\left(\frac{1}{f} g, \frac{1}{f} g\right)$	(fg, fg)	(g, g)
IX	$y = fx$		(g, fg)	

und für die Rechtskürzungsregel das Sechseck

I	$x = f$	(f, g)	(f, gf)	
II	$x = 1$	$\left(1, g \frac{1}{f}\right)$	$(1, gf)$	$(1, g)$
III	$x = \frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}, g \frac{1}{f}\right)$	$\left(\frac{1}{f}, g\right)$	
IV	$y = g \frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}, g \frac{1}{f}\right)$	$\left(1, g \frac{1}{f}\right)$	
V	$y = g$	$\left(\frac{1}{f}, g\right)$	(f, g)	$(1, g)$
VI	$y = gf$	$(1, gf)$	(f, gf)	
VII	$y = (gf) x$	$(1, gf)$	$\left(\frac{1}{f}, g\right)$	
$VIII$	$y = gx$	(f, gf)	$\left(\frac{1}{f}, g \frac{1}{f}\right)$	$(1, g)$
IX	$y = \left(g \frac{1}{f}\right) x$		$\left(1, g \frac{1}{f}\right)$	

Die Inzidenz $P_6 \in IX$, die dann folgt, liefert gerade (34) bzw. (35).

Nun hat man nach (26)

$$\frac{1}{g} (gf) = f$$

und nach (35)

$$\left(f \frac{1}{gf}\right) (gf) = f.$$

Daraus folgt

(36)
$$f \frac{1}{gf} = \frac{1}{g}.$$

Entsprechend erhält man aus (31) und (34)

(37) $$\frac{1}{fg}f=\frac{1}{g}.$$

Aus dem folgenden Sechseck mit den Trägerpunkten U_0, U_∞, O kann man die Regel

(38) $$\frac{1}{\frac{1}{f}g}\frac{1}{f}=\frac{1}{g}$$

herleiten; die Bestätigung der ersten Inzidenz in Zeile *VIII* erfolgt wegen $fg=gf$ mit (36).

I	$y=\frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{f},\frac{1}{g}\right)$	$\left(\frac{1}{fg},\frac{1}{g}\right)$	
II	$y=1$	$\left(\frac{1}{f}g,1\right)$	$\left(\frac{1}{fg},1\right)$	$\left(\frac{1}{f},1\right)$
III	$y=g$	$\left(\frac{1}{f}g,g\right)$	$\left(\frac{1}{f},g\right)$	
IV	$x=\frac{1}{f}g$	$\left(\frac{1}{f}g,g\right)$	$\left(\frac{1}{f}g,1\right)$	
V	$x=\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f},g\right)$	$\left(\frac{1}{f},\frac{1}{g}\right)$	$\left(\frac{1}{f},1\right)$
VI	$x=\frac{1}{fg}$	$\left(\frac{1}{fg},1\right)$	$\left(\frac{1}{fg},\frac{1}{g}\right)$	
VII	$y=(fg)x$	$\left(\frac{1}{fg},1\right)$	$\left(\frac{1}{f},g\right)$	
VIII	$y=fx$	$\left(\frac{1}{fg},\frac{1}{g}\right)$	$\left(\frac{1}{f}g,g\right)$	$\left(\frac{1}{f},1\right)$
IX	$y=\frac{1}{\frac{1}{f}g}x$		$\left(\frac{1}{f}g,1\right)$	

Man gewinnt damit auch

(39) $$\frac{1}{h}\frac{1}{f}=\frac{1}{fh},$$

denn nach (26) und (38) sind beide Ausdrücke gleich $\frac{1}{\frac{1}{f}(fh)}\frac{1}{f}$. Es lassen sich (36) und (37) daher auch in der Form

$$f\left(\frac{1}{f}\frac{1}{g}\right)=\frac{1}{g}=\left(\frac{1}{g}\frac{1}{f}\right)f$$

schreiben. Mit dem Verfahren, nach dem (34) und (35) gewonnen wurden, kann man dies umwandeln in

(40) $$\frac{1}{f}\left(f\frac{1}{g}\right)=\frac{1}{g}$$

(41) $$\left(\frac{1}{g}f\right)\frac{1}{f}=\frac{1}{g}.$$

(Es sind diesmal Sechsecke mit $P_0=\left(\frac{1}{g},\frac{1}{g}\right)$ bzw. $P_0=\left(1,\frac{1}{g}\right)$ zu benutzen.)

Aus (39) folgt

$$a^k \frac{1}{f} = \frac{1}{f a^{-k}} = \frac{1}{f} a^k. \tag{42}$$

Der Vergleich von (38) mit (41) liefert

$$\frac{1}{\frac{1}{f} g} = \frac{1}{g} f. \tag{43}$$

Es sollen nun noch die dualen Regeln zu (38) und (43) hergeleitet werden. Man betrachtet folgendes Sechseck mit den Trägerpunkten U_∞, U_0, O, bei dem die Größe ω definiert ist durch $\frac{1}{f}\omega = \frac{1}{g}$. Damit bestätigt man die erste Inzidenz in Zeile *VIII;* die erste Inzidenz der Zeile *VII* gilt wegen (37).

I	$x = \omega$	$(\omega, 1)$	$\left(\omega, \frac{1}{g}\right)$	
II	$x = f$	(f, g)	$\left(f, \frac{1}{g}\right)$	$(f, 1)$
III	$x = fg$	(fg, g)	$(fg, 1)$	
IV	$y = g$	(fg, g)	(f, g)	
V	$y = 1$	$(fg, 1)$	$(\omega, 1)$	$(f, 1)$
VI	$y = \frac{1}{g}$	$\left(f, \frac{1}{g}\right)$	$\left(\omega, \frac{1}{g}\right)$	
VII	$y = \frac{1}{fg} x$	$\left(f, \frac{1}{g}\right)$	$(fg, 1)$	
VIII	$y = \frac{1}{f} x$	$\left(\omega, \frac{1}{g}\right)$	(fg, g)	$(f, 1)$
IX	$y = \left(g \frac{1}{f}\right) x$		(f, g)	

Es folgt $\left(g \frac{1}{f}\right)\omega = 1$, also $\omega = \frac{1}{g \frac{1}{f}}$. Den so erhaltenen Wert setzt man in die Definitionsgleichung von ω ein und bekommt

$$\frac{1}{f} \frac{1}{g \frac{1}{f}} = \frac{1}{g}.$$

Der Vergleich mit (40) liefert

$$\frac{1}{g \frac{1}{f}} = f \frac{1}{g}. \tag{44}$$

§ 5. Brüche

Es lassen sich nun neue Hauptzerlegbarkeits-Aussagen machen.

$$\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, h\right) = g + h. \tag{45}$$

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $Lg\, g = 0$, denn man kann dann mit (42), (31) und (32′) folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}\left(f, \tfrac{1}{f} a^k, h\right) &= \boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f a^{-k}}, h\right) \\ &= \boldsymbol{T}\left((a^k + h) f a^{-k} + h f a^{-k}, \frac{1}{f a^{-k}}, (h f a^{-k}) \frac{1}{f a^{-k}}\right) \\ &= a^k + h. \end{aligned}$$

Damit hat man aber den Anfang für einen Induktionsbeweis nach dem Muster des Beweises von (13). Man setzt wie dort als erste Induktionsannahme die Richtigkeit von (45) für alle g mit $Lg\, g < n\ (> 0)$ voraus, betrachtet dann $g = a^i + \cdots + a^k$ mit $Lg\, g = n$ und definiert, falls $h = a^s + \cdots + a^t$, als Überhang von h über g

$$\varrho = \mathrm{Max}(t - k + i - s,\ t - k,\ i - s, 0).$$

Bei $\varrho = 0$ ist demgemäß $t - k \leqq 0$ und $i - s \leqq 0$. Falls $t < k$, so gilt $Lg\, h < Lg\, g = n$, und wegen $h = f\left(\frac{1}{f} h\right)$ kann man mittels (5) umwandeln und dann auf Grund der Induktionsvoraussetzung zerlegen. Falls aber $t = k$, so hat man nach dem eben Festgestellten die Zerlegbarkeit von $\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, h + g\right)$, aus der man mit (3) die gewünschte Zerlegbarkeit des Terms $\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, h\right)$ gewinnt. — Man kann daher als zweite Induktionsannahme die Richtigkeit von (45) bei $Lg\, g = n$ schon für $\varrho < r\ (> 0)$ voraussetzen und muß nun noch (45) für $\varrho = r$ beweisen, was mit der bekannten Fallunterscheidung unter Anwendung von (2) wie folgt geschieht.

Fall A $(t < k)$ und Fall B $(t = k)$:

$$\frac{\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, g + h + a^s\right) = \boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} a^s, h\right)}{\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, h\right) = \boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} a^s, g + h + a^s\right) = g + h.}$$

Fall C $(t > k)$:

$$\frac{\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, g + h + a^t\right) = \boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} a^t, h\right)}{\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} g, h\right) = \boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{f} a^t, g + h + a^t\right) = g + h.}$$

Der linke Term der oberen Zeile fällt hier und vorher unter die zweite Induktionsvoraussetzung.

Damit ist (45) vollständig bewiesen, und unter Verwendung der dualen Formeln läßt sich offenbar genau so auch

$$\boldsymbol{T}\left(f \frac{1}{g}, g, h\right) = f + h \tag{46}$$

herleiten.

Zwecks Gewinnung weiterer Rechenregeln betrachtet man jetzt das folgende Sechseck mit den Trägerpunkten U_0, U_∞ und $(0, h)$. Es kann $g \neq 0$ angenommen werden, da sonst die Folgerung (47) nichts Neues liefert.

I	$y = \frac{1}{f} g + h$	$\left(g, \frac{1}{f} g + h\right)$	$\left(\frac{1}{f} g, \frac{1}{f} g + h\right)$	
II	$y = g + h$	$(fg, g + h)$	$\left(\frac{1}{f} g, g + h\right)$	$(g, g + h)$
III	$y = fg + h$	$(fg, fg + h)$	$(g, fg + h)$	
IV	$x = fg$	$(fg, fg + h)$	$(fg, g + h)$	
V	$x = g$	$(g, fg + h)$	$\left(g, \frac{1}{f} g + h\right)$	$(g, g + h)$
VI	$x = \frac{1}{f} g$	$\left(\frac{1}{f} g, g + h\right)$	$\left(\frac{1}{f} g, \frac{1}{f} g + h\right)$	
VII	$y = \boldsymbol{T}(f, x, h)$	$\left(\frac{1}{f} g, g + h\right)$	$(g, fg + h)$	
VIII	$y = x + h$	$\left(\frac{1}{f} g, \frac{1}{f} g + h\right)$	$(fg, fg + h)$	$(g, g + h)$
IX	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, x, h\right)$		$(fg, g + h)$	

Die erste Inzidenz der Zeile *VII* bestätigt man mit (45); für die Inzidenz der letzten Zeile wendet man (25′) an:

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fg, h\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, f(g + h) + fh, \frac{1}{f}(fh)\right) = g + h.$$

Man entnimmt als Folgerung die Inzidenz

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, g, h\right) = \frac{1}{f} g + h.$$

Andererseits ist nach (25)

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, g, h\right) = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, fh + (fh + g), h\right) = \frac{1}{f}(fh + g),$$

so daß man das Ergebnis bekommt:

(47) $$\frac{1}{f}(fh + g) = h + \frac{1}{f} g.$$

Das nächste Sechseck hat die Trägerpunkte U_0, U_∞ und $(h, 0)$. Es kann $g \neq 0$ angenommen werden, da sonst die zu ziehende Folgerung trivial ist.

I	$y = \frac{1}{f} g$	$\left(g + h, \frac{1}{f} g\right)$	$\left(\frac{1}{f} g + h, \frac{1}{f} g\right)$	
II	$y = g$	$(fg + h, g)$	$\left(\frac{1}{f} g + h, g\right)$	$(g + h, g)$
III	$y = fg$	$(fg + h, fg)$	$(g + h, fg)$	
IV	$x = fg + h$	$(fg + h, fg)$	$(fg + h, g)$	
V	$x = g + h$	$(g + h, fg)$	$\left(g + h, \frac{1}{f} g\right)$	$(g + h, g)$

VI	$x = \frac{1}{f} g + h$	$\left(\frac{1}{f} g + h, g\right)$	$\left(\frac{1}{f} g + h, \frac{1}{f} g\right)$	
VII	$y = \boldsymbol{T}(f, x, fh)$	$\left(\frac{1}{f} g + h, g\right)$	$(g + h, fg)$	
VIII	$y = x + h$	$\left(\frac{1}{f} g + h, \frac{1}{f} g\right)$	$(fg + h, fg)$	$(g + h, g)$
IX	$y = \boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, x, \frac{1}{f} h\right)$		$(fg + h, g)$	

Die erste Inzidenz der Zeile *VII* bestätigt man mit (47) und (45); für die Inzidenz der Zeile *IX* hat man (27′) zur Verfügung. — Es folgt

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, g + h, \frac{1}{f} h\right) = \frac{1}{f} g,$$

oder mit geänderter Bezeichnung

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f}, g, \frac{1}{f} h\right) = \frac{1}{f} (g + h). \tag{48}$$

Um die duale Formel zu gewinnen, betrachtet man zuerst das folgende Sechseck mit den Trägerpunkten U_0, U_∞ und $(0, h)$. Es kann $f \neq 0$ angenommen werden, da sonst die Folgerung (49) nichts Neues liefert.

I	$y = (f + gh) \frac{1}{g}$	$\left(1, (f + gh) \frac{1}{g}\right)$	$\left(\frac{1}{g}, (f + gh) \frac{1}{g}\right)$	
II	$y = f + h$	$(g, f + h)$	$\left(\frac{1}{g}, f + h\right)$	$(1, f + h)$
III	$y = fg + h$	$(g, fg + h)$	$(1, fg + h)$	
IV	$x = g$	$(g, fg + h)$	$(g, f + h)$	
V	$x = 1$	$(1, fg + h)$	$\left(1, (f + gh) \frac{1}{g}\right)$	$(1, f + h)$
VI	$x = \frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}, f + h\right)$	$\left(\frac{1}{g}, (f + gh) \frac{1}{g}\right)$	
VII	$y = \boldsymbol{T}(fg, x, h)$	$\left(\frac{1}{g}, f + h\right)$	$(1, fg + h)$	
VIII	$y = \boldsymbol{T}(f, x, h)$	$\left(\frac{1}{g}, (f + gh) \frac{1}{g}\right)$	$(g, fg + h)$	$(1, f + h)$
IX	$y = \boldsymbol{T}\left(f \frac{1}{g}, x, h\right)$		$(g, f + h)$	

Die erste Inzidenz der Zeile *VII* und der Zeile *VIII* bestätigt man mit (32′) bzw. (32):

$$\boldsymbol{T}\left(fg, \frac{1}{g}, h\right) = \boldsymbol{T}\left((f + h) g + hg, \frac{1}{g}, (hg) \frac{1}{g}\right) = f + h,$$

$$\boldsymbol{T}\left(f, \frac{1}{g}, h\right) = \boldsymbol{T}\left(hg + (f + gh), \frac{1}{g}, h\right) = (f + gh) \frac{1}{g}.$$

Für die Inzidenz der Zeile *IX* hat man (46) zur Verfügung. — Es folgt

$$\boldsymbol{T}\left(f \frac{1}{g}, 1, h\right) = (f + gh) \frac{1}{g}.$$

Durch Anwendung von (7) auf den T-Term erhält man daraus

$$T\left(h, 1, f\frac{1}{g}\right) = (f + gh)\frac{1}{g}. \tag{49}$$

Nun wird noch ein Sechseck mit den Trägerpunkten U_h, U_∞ und O ausgewertet. Die im Inzidenzschema auftretende Größe ω wird definiert durch $T\left(h, \frac{1}{g}, \omega\right) = (h+f)\frac{1}{g}$, womit die zweite Inzidenz der ersten Zeile bestätigt ist. — Es kann $f \neq 0$ angenommen werden, da sonst die Folgerung (50) trivial ist.

I	$y = T(h, x, \omega)$	$\left(1, T(h, 1, \omega)\right)$	$\left(\frac{1}{g}, (f+h)\frac{1}{g}\right)$	
II	$y = T(h, x, f)$	$(g, f + hg)$	$\left(\frac{1}{g}, (fg+h)\frac{1}{g}\right)$	$(1, f+h)$
III	$y = T(h, x, fg)$	$(g, (f+h)g)$	$(1, fg+h)$	
IV	$x = g$	$(g, (f+h)g)$	$(g, f+hg)$	
V	$x = 1$	$(1, fg+h)$	$\left(1, T(h, 1, \omega)\right)$	$(1, f+h)$
VI	$x = \frac{1}{g}$	$\left(\frac{1}{g}, (fg+h)\frac{1}{g}\right)$	$\left(\frac{1}{g}, (f+h)\frac{1}{g}\right)$	
VII	$y = (fg+h)x$	$\left(\frac{1}{g}, (fg+h)\frac{1}{g}\right)$	$(1, fg+h)$	
VIII	$y = (f+h)x$	$\left(\frac{1}{g}, (f+h)\frac{1}{g}\right)$	$(g, (f+h)g)$	$(1, f+h)$
IX	$y = \left((f+hg)\frac{1}{g}\right)x$		$(g, f+hg)$	

[Hier gehört die Gerade *IX* nicht zum Büschel durch U_h, weil der Faktor von x nach (49) nicht gleich $T(h, 1, 0) = h$ ist.] Die zweite Inzidenz der Zeile *II* bestätigt man mit (32):

$$T\left(h, \frac{1}{g}, f\right) = T\left(fg + (fg+h), \frac{1}{g}, f\right) = (fg+h)\frac{1}{g}.$$

Man entnimmt als Folgerung

$$T(h, 1, \omega) = (f + hg)\frac{1}{g}.$$

Nach (49) ist deshalb $\omega = f\frac{1}{g}$. Setzt man diesen Wert in die Definitionsgleichung von ω ein, so erhält man

$$T\left(h, \frac{1}{g}, f\frac{1}{g}\right) = (f+h)\frac{1}{g}. \tag{50}$$

Damit hat man insbesondere auch die Gleichung

$$T\left(a^k, a^0\frac{1}{g}, h\frac{1}{g}\right) = (a^k + h)\frac{1}{g}$$

zur Verfügung. Sie kann als (erster) Induktionsanfang für einen Beweis der allgemeineren Zerlegbarkeit

$$T\left(a^{k-\mu}, a^\mu\frac{1}{g}, h\frac{1}{g}\right) = (a^k + h)\frac{1}{g} \tag{51}$$

dienen. Muster dafür ist der Beweis von (11). Es ist auch hier nur nötig, positive Exponenten μ zu betrachten. Man setzt als erste Induktionsannahme die Richtigkeit von (51) für $\mu < m\ (>0)$ voraus und hat sie nun für $\mu = m$ nachzuweisen. Der Überhang von h über a^k sei ϱ. Bei $\varrho = 0$ besteht h nur aus der einzigen Potenz a^k; dann ist aber (51) gemäß (4) richtig, weil wegen (42)

$$a^{k-\mu}\left(a^{\mu}\frac{1}{g}\right) = a^{k-\mu}\frac{1}{g\,a^{-\mu}} = \frac{1}{g\,a^{-k}} = a^k\frac{1}{g} \tag{52}$$

gilt. Als zweite Induktionsannahme werde nun bei $\mu = m$ die Richtigkeit von (51) für $\varrho < r\ (>0)$ vorausgesetzt. Der Beweis für $\varrho = r$ läßt sich dann einfach an Hand des Beweises von (11) führen: Man muß dort nur mit (8) an Stelle von (1) arbeiten, weil ja jetzt die a-Potenz mit dem Induktionsexponenten μ als zweites Argument des $\boldsymbol{T}$-Terms vorkommt, und außerdem an den erforderlichen Stellen den Rechtsfaktor $1/g$ hinzufügen.

Setzt man in (51) $\mu = k$, so ergibt sich

$$\boldsymbol{T}\left(a^0, a^k\frac{1}{g}, h\frac{1}{g}\right) = (a^k + h)\frac{1}{g}.$$

Andererseits ist nach der Definition der Addition

$$\boldsymbol{T}\left(1, a^k\frac{1}{g}, h\frac{1}{g}\right) = a^k\frac{1}{g} + h\frac{1}{g}.$$

Aus der Gleichheit der rechten Seiten entnimmt man aber sofort das allgemeinere Distributivgesetz

$$(f + h)\frac{1}{g} = f\frac{1}{g} + h\frac{1}{g}. \tag{53}$$

In diesem ist als Sonderfall das duale Gegenstück zu (47) enthalten:

$$(fh + g)\frac{1}{f} = h + g\frac{1}{f}. \tag{54}$$

Mit den bisher gewonnenen Regeln soll nun hergeleitet werden

$$\frac{1}{f}g = g\frac{1}{f}. \tag{55}$$

Beweis. (55) ist richtig für $Lg\,f = 0$, sei schon als richtig erkannt für alle f mit $Lg\,f < n\ (>0)$ und soll nun für $Lg\,f = n$ bewiesen werden. Wegen (47) und (54) darf man sich auf den Nachweis von $\frac{1}{f}g' = g'\frac{1}{f}$ mit $Lg\,g' < Lg\,f$ beschränken, denn bei beliebig vorgegebenem f, g läßt sich offenbar immer eine Darstellung $g = fh + g'$ mit $Lg\,g' < Lg\,f$ angeben. Diese eingeschränkte Behauptung erhält man aber mittels (43) und (44) sofort aus der Gleichung

$$\frac{1}{\frac{1}{g'}f} = \frac{1}{f\frac{1}{g'}},$$

deren Richtigkeit von der Induktionsvoraussetzung ausgesagt wird.

Das in (55) stehende Produkt wird von jetzt an *a-Bruch* (oder kürzer *Bruch*) mit dem *Zähler* g und dem *Nenner* f genannt, und es wird dafür die Schreibweise g/f verwendet. Damit ist die bisher schon benutzte Bezeichnung $1/f$ für das Inverse von f verträglich. Zwischen den a-Brüchen und den a-Potenzsummen besteht offensichtlich der Zusammenhang

$$\frac{f}{1} = f. \tag{56}$$

§ 6. Bruchrechnung

In der neuen Schreibweise besitzen die Rechenregeln (43) und (53) die Gestalt

$$\frac{1}{\frac{f}{g}} = \frac{g}{f}, \tag{57}$$

also insbesondere

$$\frac{1}{f a^{-k}} = \frac{a^k}{f}, \tag{58}$$

und

$$\frac{g+h}{f} = \frac{g}{f} + \frac{h}{f}. \tag{59}$$

Die Erweiterungsregel für Brüche

$$\frac{g}{f} = \frac{gh}{fh} \tag{60}$$

läßt sich auf dem schon bei (55) eingeschlagenen Weg beweisen. (60) ist wegen (26) richtig für $Lg\, f = 0$, sei als bereits bewiesen vorausgesetzt für alle f mit $Lg\, f < n\ (> 0)$ und soll nun für $Lg\, f = n$ hergeleitet werden. Dann kann man sich wegen (54) auf die Betrachtung von Brüchen g'/f mit $Lg\, g' < Lg\, f$ beschränken und mit (57) die Behauptung auf die Induktionsvoraussetzung zurückführen:

$$\frac{g'}{f} = \frac{1}{\frac{f}{g'}} = \frac{1}{\frac{fh}{g'h}} = \frac{g'h}{fh}.$$

Nach (59) und (60) ist es also möglich, a-Brüche in der sonst üblichen Weise zu addieren:

$$\frac{f}{p} + \frac{g}{q} = \frac{fq + gp}{pq}. \tag{61}$$

Man ist jetzt in der Lage, die Beweise der §§ 3 und 4 zur Herleitung von Rechenregeln für a-Brüche auszunutzen.

Aus (58) folgt die (schon bekannte) Gleichung

$$a^{\mu}\frac{a^{k-\mu}}{p} = \frac{a^k}{p}.$$

Zusammen mit der Regel (51), die man jetzt in der Form

$$\boldsymbol{T}\left(a^{\mu}, \frac{a^{k-\mu}}{p}, \frac{h}{p}\right) = \frac{a^{k}+h}{p}$$

zu schreiben hat, kann sie als Induktionsanfang für den Beweis von

(62) $$a^{\mu}\frac{g}{p} = \frac{a^{\mu}g}{p},$$

(63) $$\boldsymbol{T}\left(a^{\mu}, \frac{g}{p}, \frac{h}{p}\right) = \frac{a^{\mu}g+h}{p}$$

dienen, der genau dem Beweis von (12), (13) entspricht: Man fügt dort einfach an allen erforderlichen Stellen den Nenner p hinzu.

Wegen (58) und (60) hat man außerdem

$$f\frac{a^{\mu}}{p} = \frac{f a^{\mu}}{p}$$

und gewinnt aus (50)

$$\boldsymbol{T}\left(f, \frac{a^{\mu}}{p}, \frac{h}{p}\right) = \frac{f a^{\mu}+h}{p}.$$

Diese beiden Gleichungen bilden aber zusammen mit (62), (63) den Induktionsanfang für den Beweis von

(64) $$f\frac{g}{p} = \frac{fg}{p},$$

(65) $$\boldsymbol{T}\left(f, \frac{g}{p}, \frac{h}{p}\right) = \frac{fg+h}{p},$$

der, vom Nenner p abgesehen, fast wörtlich derselbe ist wie der Beweis von (18), (19).

Die dualen Aussagen

(66) $$\frac{f}{p}g = \frac{fg}{p},$$

(67) $$\boldsymbol{T}\left(\frac{f}{p}, g, \frac{h}{p}\right) = \frac{fg+h}{p}$$

lassen sich ohne Schwierigkeit herleiten, da man auf Grund von (58) die Gleichung

$$\frac{a^{\mu}}{p}a^{k-\mu} = \frac{a^{k}}{p}$$

und als Sonderfall von (48) unter Berücksichtigung von (58) und (60) die Regel

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{a^{\mu}}{p}, a^{k-\mu}, \frac{h}{p}\right) = \frac{a^{k}+h}{p}$$

zur Verfügung hat und darauf die erforderlichen Induktionsbeweise aufbauen kann.

Um zu Formeln zu gelangen, in denen ein weiterer Nenner q vorkommt, hat man den Weg, der von dem Gleichungspaar (18), (19) zu den Gln. (64) bis (67) führte, im wesentlichen noch einmal zu durchlaufen.

Man bekommt zunächst mit den Beweisen für (24), (25) und (26), (27):

$$\frac{1}{f}\left(f\frac{a^\mu}{p}\right)=\frac{a^\mu}{p},$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},\frac{f a^\mu+h}{p},\frac{a^\mu}{p}\right)=\frac{1}{f}\frac{h}{p},$$

(68) $$\frac{1}{f}\left(f\frac{g}{p}\right)=\frac{g}{p},$$

(69) $$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},\frac{fg+h}{p},\frac{g}{p}\right)=\frac{1}{f}\frac{h}{p}.$$

[Die erste dieser Gleichungen besitzt man natürlich schon nach (24) und (58).]

Aus (68) erhält man wie bei der Umformung von (26) in (34) unter Heranziehung eines Sechsecks mit $P_0=\left(\frac{g}{p},\frac{g}{p}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{f}\frac{g}{p}\right)=\frac{g}{p}.$$

Man hat außerdem nach (64) und (60)

$$f\frac{g}{fp}=\frac{fg}{fp}=\frac{g}{p}.$$

Daher folgt

(70) $$\frac{1}{f}\frac{g}{p}=\frac{g}{fp}.$$

Auf dem dualen Wege ergeben sich die Gleichungen

$$\left(\frac{f}{p}g\right)\frac{1}{g}=\frac{f}{p},$$

(71) $$\boldsymbol{T}\left(\frac{fg+h}{p},\frac{1}{g},\frac{f}{p}\right)=\frac{h}{p}\frac{1}{g},$$

(72) $$\frac{f}{p}\frac{1}{g}=\frac{f}{pg}.$$

Nun kann man weiter aus den in § 5 angegebenen Sechsecken, von denen man jetzt nur das zweite und vierte braucht, Folgerungen ziehen. Wenn man bei dem zweiten Sechseck g und h überall durch g/p und h/p ersetzt und zur Bestätigung der nichttrivialen Inzidenzen (65) und (69) heranzieht, erhält man

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{1}{f},\frac{g+h}{p},\frac{h}{fp}\right)=\frac{g}{fp}.$$

Das vierte Sechseck liefert dual dazu, wenn man dort überall f und h durch f/p und h/p ersetzt und die nichttrivialen Inzidenzen mit (67), (71) und (72) bestätigt:

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{h}{p},\frac{1}{g},\frac{f}{pg}\right)=\frac{h+f}{pg}.$$

Wegen (58) lassen sich diese beiden Gleichungen mit anderer Bezeichnung auch folgendermaßen schreiben:

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{a^\mu}{p}, \frac{g}{q}, \frac{h}{pq}\right) = \frac{a^\mu g + h}{pq},$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{f}{p}, \frac{a^\mu}{q}, \frac{h}{pq}\right) = \frac{f a^\mu + h}{pq}.$$

Da außerdem nach (70) und (72)

$$\frac{a^\mu}{p}\frac{g}{q} = \frac{a^\mu g}{pq} \quad \text{und} \quad \frac{f}{p}\frac{a^\mu}{q} = \frac{f a^\mu}{pq}$$

gilt, besitzt man die Induktionsanfänge für den Beweis von

$$\frac{f}{p}\frac{g}{q} = \frac{fg}{pq}, \tag{73}$$

$$\boldsymbol{T}\left(\frac{f}{p}, \frac{g}{q}, \frac{h}{pq}\right) = \frac{fg + h}{pq}, \tag{74}$$

der nach dem Muster des Beweises von (18), (19) verläuft.

(73) ist aber die Regel für die Bruchmultiplikation, die bisher noch fehlte, während durch (74) in Verbindung mit (59), (73) und (60) die Zerlegbarkeit jedes $\boldsymbol{T}$-Terms ausgesagt wird, dessen Argumente drei beliebige a-Brüche sind.

Die Gln. (56), (60), (61) und (73) besagen, daß der Bereich aller a-Brüche (mit der Addition und Multiplikation des Ternärkörpers) isomorph ist zu dem (formal zu bildenden) Quotientenkörper des Integritätsbereichs aller a-Potenzsummen. Damit ist Satz 3 von der Endlichkeitsvoraussetzung befreit:

Satz 4. *Jeder Anti-*Fano*-Ternärkörper, der von einem Element* $a \neq 0, 1$ *erzeugt wird, ist ein Körper, und zwar eine einfache Erweiterung des Primkörpers der Charakteristik 2.*

Geometrisch bedeutet das:

Satz 5. *In jeder Anti-*Fano*-Ebene, die von einem nichtausgearteten Punktquadrupel und einem weiteren Punkt auf einer Verbindungsgerade erzeugt wird, gilt der Satz von* Pappos.

Daraus läßt sich noch folgende Aussage über Schließungssätze, die in allen Anti-Fano-Ebenen richtig sind, gewinnen (wegen der darin vorkommenden Begriffe und wegen des Beweises sei auf [*10*], S. 26ff. und S. 189, verwiesen):

Satz 6. *In jeder Anti-*Fano*-Ebene gelten alle allgemeinen konstruierbaren primitiven Schließungssätze vom Rang 8 und 9, die aus dem Satz von* Pappos *folgen.*

Zu diesen Schließungssätzen gehört insbesondere die zweifache Ausartung des Satzes von Desargues, die nach [*5*] dem Satz vom vollständigen Vierseit

äquivalent ist. Berücksichtigt man noch das in der Einleitung Gesagte, so ergibt sich:

Satz 7. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in einer projektiven Ebene alle allgemeinen konstruierbaren primitiven Schließungssätze vom Rang 8 und 9 gelten, die aus dem Satz von* PAPPOS *folgen, ist die Gültigkeit der zweifachen Ausartung des Satzes von* DESARGUES.

Ob auch die Gültigkeit der beiden (oder sogar nur eines der beiden) kleinen Sätze von PAPPOS eine solche Bedingung liefert, ist unbekannt. Im Hinblick auf Untersuchungen in dieser Richtung wurde hier mehrfach die Sechseckbedingung herangezogen, obwohl es möglich gewesen wäre, jedes Sechseck durch ein Trapez mit der Eigenschaft (AF) zu ersetzen. [Bei den Sechsecken in § 4 wird das zugehörige Ersatz-Trapez jeweils aus den Punkten P_0, P_1, P_3, P_4, P_6, Q_3 und dem uneigentlichen Punkt der Gerade $VIII$ gebildet (vgl. Fig. 2). Dasselbe trifft für die beiden ersten Sechsecke des § 5 zu, und durch Dualisierung der beiden so erhaltenen Trapeze erhält man die Ersatz-Trapeze für die beiden letzten Sechsecke des § 5.]

Literatur

[1] BLASCHKE, W., u. G. BOL: Geometrie der Gewebe, § 4. Berlin 1938. — [2] BOL, G.: Gewebe und Gruppen. Math. Ann. **114**, 414—431 (1937). — [3] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [4] MOUFANG, R.: Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene. Math. Ann. **105**, 536—601 (1931). — [5] MOUFANG, R.: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecknetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander. Math. Ann. **106**, 755—795 (1932). — [6] MOUFANG, R.: Ein Satz über die Schnittpunktsätze des allgemeinen Fünfecknetzes. Math. Ann. **107**, 124—139 (1932). — [7] MOUFANG, R.: Die Desarguesschen Sätze vom Rang 10. Math. Ann. **108**, 296—310 (1933). — [8] MOUFANG, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **9**, 207—222 (1933). — [9] PICKERT, G.: Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalpunkten. Math. Z. **56**, 131—133 (1952). — [10] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 29. November 1955)

Volkmann, B.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 389—413 (1956)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. V.*)

Von
Bodo Volkmann

§ 1. Einleitung

1. Ist $g \geqq 2$ eine ganze Zahl, so gibt es bekanntlich für jede reelle Zahl ϱ mit $0 < \varrho \leqq 1$ eine g-adische Entwicklung oder Zifferndarstellung, d.h. eine Potenzreihe der Form

$$\varrho = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{g^j}, \tag{1}$$

deren Koeffizienten e_j ganze Zahlen mit $0 \leqq e_j < g$ sind. Wir setzen im folgenden stets voraus, daß unendlich viele $e_j \neq 0$ sind, so daß die Darstellung (1) immer eindeutig ist, und nennen die Folge $\{e_j\}$ dann die (g-adische) Ziffernfolge von ϱ.

Eine geordnete Menge $\{f_1, \ldots, f_i\}$ von (nicht notwendig verschiedenen) g-adischen Ziffern, abkürzend mit $F = f_1 \ldots f_i$ bezeichnet[1]), nennen wir eine (g-adische) *Sequenz*. Gibt es ein $n \geqq 0$, so daß in der Ziffernfolge einer Zahl ϱ

$$e_{n+1} \ldots e_{n+i} = f_1 \ldots f_i$$

ist, so sagen wir, F trete bei ϱ auf oder ϱ sei F-haltig; andernfalls nennen wir ϱ eine *F-freie* Zahl. Dieselbe Ausdrucksweise gebrauchen wir auch für Sequenzen E an Stelle unendlicher Ziffernfolgen $\{e_j\}$. Als *Länge* $i = |F|$ einer Sequenz F bezeichnen wir die Anzahl ihrer (nicht notwendig verschiedenen) Ziffern.

In einer früheren Arbeit [12][2]) wurde die Menge $K(F; g)$ der F-freien g-adischen Zahlen betrachtet und ihre Hausdorffsche Dimension bestimmt. Das dortige Resultat wird in der vorliegenden Arbeit auf die Menge $K(F_1, \ldots, F_m; g)$ der Zahlen ϱ verallgemeinert, bei denen keine Sequenz eines vorgegebenen Systems $\{F_1, \ldots, F_m\}$ auftritt. Für den Fall $m = 1$ wird dabei

*) Gekürzte Fassung einer Arbeit, die von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Mainz als Habilitationsschrift angenommen wurde. — Vorgetragen auf der Tagung über Zahlentheorie im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, 3.—8. Januar 1955.

[1]) Es dürfte keine Gefahr der Verwechslung mit dem Produkt $\prod_{j=1}^{i} f_j$ bestehen.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

ein neuer Beweis erbracht[3]), der über die Dimension α von $K(F; g)$ hinaus noch eine obere und eine untere Schranke für das α-dimensionale HAUSDORFF-sche Maß ergibt.

Als Hilfsmittel verwenden wir bei den nachfolgenden Beweisen die in [12] eingeführten E-Fächer. Einem solchen E-Fächer kann man einerseits eine Matrix $\mathfrak{A}$ und andererseits eine Punktmenge M derart zuordnen, daß die Dimension von M von den Eigenwerten von $\mathfrak{A}$ abhängt. Als solche Mengen M werden sich insbesondere die Mengen $K(F_1, \ldots, F_m; g)$ darstellen lassen. So ergibt sich der für das behandelte Gebiet kennzeichnende Sachverhalt, daß sich hier Zahlentheorie, Maßtheorie und Algebra in eigentümlicher und reizvoller Weise berühren.

2. Hinsichtlich der Terminologie schicken wir folgende Bemerkungen voraus:

1) Ist W eine Menge von Punktmengen, so bezeichnen wir die Vereinigung dieser Punktmengen mit W'.

2) Den Durchmesser einer unendlichen Punktmenge M bezeichnen wir mit $|M|$, ihre abgeschlossene Hülle mit M^*.

3) Ist n eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir die g^n Intervalle der Form

$$\nu g^{-n} < \varrho \leqq (\nu + 1) g^{-n} \qquad (\nu = 0, \ldots, g^n - 1)$$

als die (g-adischen) *Grundintervalle n-ter Stufe*. Sie treten bei allen metrischen Betrachtungen über Ziffernentwicklungen auf, da die Menge aller Zahlen ϱ, deren g-adische Entwicklung (1) mit einer vorgeschriebenen Ziffernsequenz F der Länge n beginnt, als Punktmenge aufgefaßt, ein Grundintervall n-ter Stufe ist. Wir nennen dann F die zu diesem Grundintervall gehörende Sequenz.

4) Für das Aneinanderfügen zweier Sequenzen $E = e_1 \ldots e_m$ und $F = f_1 \ldots f_n$ verwenden wir die ohne weiteres verständliche Schreibweise $e_1 \ldots e_m f_1 \ldots f_n = EF$. Bezüglich dieser Operation bilden die g-adischen Sequenzen eine Halbgruppe, in der die „leere" Sequenz L, definiert durch die Bedingung

$$EL = LE = E \qquad \text{für jede Sequenz } E,$$

die Rolle eines Einselements spielt. Wir schreiben der leeren Sequenz die Länge 0 zu, so daß immer $|EF| = |E| + |F|$ ist.

5) Ist $E = e_1 \ldots e_n$, so bezeichnen wir die „invertierte" Sequenz $e_n \ldots e_1$ mit $\tilde{E}$.

---

[3]) Ein solcher neuer Beweis war nötig, da der in [12] angegebene leider folgende Lücke enthält: Aus dem zum Beweis von Hilfssatz 3 in [12], S. 265 herangezogenen Ergebnis aus der Arbeit [4] von FROBENIUS folgt nicht, wie dort zitiert, $\gamma_1 > |\gamma_j|$, sondern nur $\gamma_1 \geq |\gamma_j|$. Der Text von [4] ist an der betreffenden Stelle mißverständlich, ebenso die hierauf bezugnehmende Einleitung der nachfolgenden Arbeit „Über Matrizen aus positiven Elementen. II." Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **18**, 514—518 (1909).

In [12], Satz 6c) muß es heißen: „... zu $\mathfrak{P}(F')$ oder zu $\mathfrak{P}(F)$" statt „... zu $\mathfrak{P}(F)$ oder zu $\mathfrak{P}(F')$"; ebenso sind in der letzten Ungleichung des Beweises F und F' zu vertauschen.

6) Entsteht F durch Aneinanderfügen von $n \geqq 1$ Exemplaren von E, so sagen wir, die Sequenz F sei ein *Vielfaches* der Sequenz E. Dann ist $|F|$ ein Vielfaches von $|E|$.

7) Unter dem *Typ* einer Sequenz E in bezug auf eine Sequenz F, geschrieben $t(E, F)$, verstehen wir die größte Zahl $\varkappa$ derart, daß die Sequenz der letzten $\varkappa$ Ziffern von E der Sequenz der ersten $\varkappa$ Ziffern von F gleicht. Somit ist $t(E, F)$ eine ganze Zahl mit $0 \leqq t(E, F) \leqq |F|$, und wenn E eine F-freie Sequenz ist, gilt sogar $0 \leqq t(E, F) < |F|$.

Kap. 1. Graphentheoretische und maßtheoretische Hilfsbetrachtungen

§ 2. *E*-Fächer

3. Wie in [*12*], Nr. 2 bezeichnen wir einen Fächer Ξ dann als *E-Fächer*, wenn es unter seinen (abzählbar unendlich vielen) Unterfächern nur endlich viele verschiedene gibt. Die Anzahl k der verschiedenen Unterfächer eines E-Fächers nennen wir seine *Klasse*. Dann kann Ξ folgendermaßen durch eine k-reihige Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ beschrieben werden: Sind $\Xi_0, \ldots, \Xi_{k-1}$ die verschiedenen Unterfächer von Ξ und ist etwa $\Xi = \Xi_0$, so sagen wir, ein Knotenpunkt A sei vom *Typ* $\varkappa$, wenn der zugehörige Unterfächer $\Xi(A) = \Xi_\varkappa$ ist. Dann sei das Matrixelement $a_{\varkappa\lambda}(\varkappa, \lambda = 0, \ldots, k-1)$ gleich der Anzahl der Knotenpunkte des Fächers Ξ_λ, die den Index 1 und den Typ $\varkappa$ haben. Durch die Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ und die Festsetzung $\Xi = \Xi_0$ ist der Fächer Ξ eindeutig bestimmt; denn wenn $\mathfrak{A}(\Xi)$ bekannt ist, läßt sich Ξ sukzessive von seinem Endpunkt A_0 aus konstruieren, da mit jedem Knotenpunkt A, den man bei dieser Konstruktion erhält, vermöge einer Beziehung der Form $\Xi(A) = \Xi_\varkappa$ sein Grad gegeben ist.

4. Die Fächer $\Xi_0, \ldots, \Xi_{k-1}$ sind definitionsgemäß sämtlich E-Fächer, da jeder ihrer Unterfächer einem der $\Xi_\varkappa$ gleicht. Jedoch brauchen für $\varkappa \neq 0$ nicht sämtliche k Fächer als Unterfächer von $\Xi_\varkappa$ aufzutreten, so daß die Klasse von $\Xi_\varkappa$ kleiner als k sein kann. Dennoch gilt, wenn man für jedes ganze $n \geqq 0$ die Anzahl der Knotenpunkte des Fächers $\Xi_\varkappa$, deren Index n ist, mit $h_\varkappa(n)$ bezeichnet, der

Satz 1[4]**.** Die Funktionen $h_\varkappa(n)$ genügen sämtlich der linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Gleichung die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ ist.

Beweis. Sei $a_{\varkappa\lambda}(n)$ die Anzahl der Knotenpunkte A_n des Fächers Ξ_λ, die den Index n und den zugehörigen Unterfächer $\Xi(A_n) = \Xi_\varkappa$ haben. Dann ist $h_\lambda(n) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} a_{\varkappa\lambda}(n)$. Folglich gilt, wenn man die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)^n$ mit $a_{\varkappa\lambda}^{(n)}$ bezeichnet,

$$h_\lambda(n) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} a_{\varkappa\lambda}^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ \mathfrak{A}(\Xi)^0 = \text{Einheitsmatrix}); \tag{2}$$

[4]) Im wesentlichen von [*12*], Satz 2 übernommen.

denn es ist

$$a_{\varkappa\lambda}^{(n)} = a_{\varkappa\lambda}(n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Für $n = 0$ gilt die Gl. (3) nämlich trivialerweise, und wenn sie für irgendein n und alle $\varkappa$, λ bewiesen ist, ergibt sich

$$a_{\varkappa\lambda}(n+1) = \sum_{\mu=0}^{k-1} a_{\varkappa\mu}\, a_{\mu\lambda}(n) = \sum_{\mu=0}^{k-1} a_{\varkappa\mu}\, a_{\varkappa\lambda}^{(n)} = a_{\varkappa\lambda}^{(n+1)},$$

so daß (3) und damit auch (2) für alle n gilt.

Die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ sei

$$z^k + q_{k-1} z^{k-1} + \cdots + q_1 z + q_0 = 0.$$

Dann gilt nach der sog. CAYLEYschen Relation[5]) die Matrizengleichung

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^k + q_{k-1}\mathfrak{A}^{k-1} + \cdots + q_1\mathfrak{A} + q_0\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \\ \mathfrak{E} = \text{Einheitsmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \text{Nullmatrix}. \end{cases} \tag{4}$$

Folglich erhält man nach Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{n+1-k}$ für $n+1 \geq k$, da die Matrizen auf beiden Seiten von (4) elementweise gleich sind,

$$a_{\varkappa\lambda}^{(n+1)} + q_{k-1} a_{\varkappa\lambda}^{(n)} + \cdots + q_0 a_{\varkappa\lambda}^{(n-k+1)} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 0, \ldots, k-1).$$

Hieraus ergibt sich nach Summation über $\varkappa$ von 0 bis $k-1$ auf Grund von (2) die behauptete Beziehung

$$h_\lambda(n+1) + q_{k-1} h(n) + \cdots + q_0 h_\lambda(n-k+1) = 0 \qquad (n+1 \geq k).$$

§ 3. Mengen, die einem E-Fächer g-adisch zugeordnet sind

5. Sei Ξ ein E-Fächer, dessen *Grad*[6]) höchstens gleich $g+1$ ist, und sei $h(n) = h_0(n)$ die in § 2 definierte Anzahlfunktion seiner Knotenpunkte. Dann bezeichnen wir eine lineare Punktmenge M als dem Fächer Ξ *(g-adisch) zugeordnet*, falls es eine Folge $I_1, I_2, \ldots$ von Mengen gibt derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Elemente von I_n sind jeweils $h(n)$ Grundintervalle n-ter Stufe, die mit $\mathfrak{i}_n^1, \ldots, \mathfrak{i}_n^{h(n)}$ bezeichnet werden mögen.

b) Für zwei Intervalle $\mathfrak{i}_n^r$ und $\mathfrak{i}_p^s$ gilt genau dann $\mathfrak{i}_n^r \leqq \mathfrak{i}_p^s$, wenn der Knotenpunkt A_n^r von Ξ dem Unterfächer $\Xi(A_p^s)$ angehört.

c) Die Mengen $M \wedge \mathfrak{i}_n^r$ und $M \wedge \mathfrak{i}_p^s$ sind einander im Verhältnis $1 : g^{n-p}$ geometrisch ähnlich, falls die Knotenpunkte A_n^r und A_p^s vom gleichen Typ sind.

d) Im Sinne von § 1, Bem. 1) ist

$$M = \bigwedge_{n=0}^{\infty} I_n' \qquad (I_0' = \text{Intervall } 0 < \varrho \leqq 1). \tag{5}$$

[5]) Siehe z.B. MACDUFFEE [2], S. 18.

[6]) Unter dem Grad eines Fächers verstehen wir das Maximum der Grade seiner Knotenpunkte.

Sind die Bedingungen a) bis d) erfüllt, so bezeichnen wir die zu i_n^r gehörende Sequenz mit E_n^r und nennen irgend zwei von den vier Dingen „Knotenpunkt A_n^r, Unterfächer $\Xi(A_n^r)$, Grundintervall i_n^r und Sequenz E_n^r" einander zugehörig. Aus b) folgt insbesondere

$$I_n' \geqq I_{n+1}' \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

6. Im folgenden soll für solche Mengen M unter der (bei den beabsichtigten Anwendungen stets erfüllten) Zusatzvoraussetzung, daß die Funktion $h(n)$ für alle nichtnegativen ganzzahligen Werte von a und b der Ungleichung

$$h(a+b) \leqq h(a)\, h(b) \tag{7}$$

genügt, die Hausdorffsche Dimension bestimmt werden. Es gilt der

Satz 2. Sei Ξ ein E-Fächer, dessen Grad $\leqq g+1$ ist und dessen Funktion $h(n)$ der Bedingung (7) genügt, und sei M eine ihm g-adisch zugeordnete Punktmenge. Dann existiert $\chi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log h(n)$, und es ist

$$\dim M = \frac{\chi}{\log g} = \delta. \tag{8}$$

Beweis. a) Zum Nachweis der Existenz des Grenzwertes bemerken wir, daß nach (7) für natürliches w und n

$$h(w\,n) \leqq h(n)^w$$

und folglich

$$\frac{\log h(w\,n)}{w\,n} \leqq \frac{\log h(n)}{n} \tag{9}$$

gilt. Ist nun $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log h(n)}{n} = \underline{\chi}$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log h(n)}{n} = \overline{\chi}$, so werde n_0 bei gegebenem $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $\left| \frac{\log h(n_0)}{n_0} - \underline{\chi} \right| < \varepsilon$ ist. Daraus folgt dann wegen (9)

$$\frac{\log h(w\,n_0)}{w\,n_0} \leqq \frac{\log h(n_0)}{n_0} < \underline{\chi} + \varepsilon \qquad (w = 1, 2, \ldots)$$

und damit

$$\overline{\lim_{w\to\infty}} \frac{\log h(w\,n_0)}{w\,n_0} \leqq \underline{\chi} + \varepsilon. \tag{10}$$

Da jeder Knotenpunkt des Fächers Ξ höchstens vom Grad $g+1$, also höchstens mit g Knotenpunkten des nächsthöheren Index durch Wege der Länge 1 verbunden ist, wird

$$h(j+1) \leqq g\, h(j) \qquad (j = 0, 1, \ldots).$$

Folglich gilt, wenn bei beliebigem n die Zahl w so gewählt wird, daß

$$w\,n_0 \leqq n < (w+1)\, n_0$$

ist, die Beziehung

$$\frac{\log h(n)}{n} < \frac{\log h(w\,n_0 + n_0)}{w\,n_0} \leqq \frac{\log\left(g^{n_0}\, h(w\,n_0)\right)}{w\,n_0} = \frac{\log h(w\,n_0)}{w\,n_0} + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Daraus ergibt sich nach (10)

$$\overline{\chi} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log h(n)}{n} \leqq \overline{\lim_{w\to\infty}} \frac{\log h(w n_0)}{w n_0} \leqq \underline{\chi} + \varepsilon,$$

und somit ist

$$\overline{\chi} = \underline{\chi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log h(n)}{n} = \chi.$$

b) Um zu zeigen, daß

$$\dim M \geqq \delta \tag{11}$$

ist, berücksichtigen wir, daß die Menge I'_n eine g^{-n}-Überdeckung von M darstellt[7]). Folglich wird für jedes $\alpha > \delta$, da nach Teil a)

$$h(n) = e^{n(\chi + o(1))} = g^{n(\delta + o(1))}$$

ist, das α-dimensionale HAUSDORFFsche Maß von M

$$\{M\}^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} h(n)\, g^{-n\alpha} = \lim_{n\to\infty} g^{n(\delta - \alpha + o(1))} = 0,$$

also $\dim M \leqq \alpha$. Daraus folgt (11).

c) Zum Beweis von Beweis von Satz 2 fehlt nun noch der Nachweis von

$$\dim M \leqq \delta. \tag{12}$$

Dazu verwenden wir, wenn $I = \bigvee_{n=1}^{\infty} I_n$ gesetzt wird, den

Hilfssatz 1.[8]) Ist $0 < \alpha \leqq 1$, so gibt es zu jedem Intervall $(\eta_1; \eta_2) \subseteqq (0; 1)$ eine endliche Menge $V \subseteqq I$ mit

$$(\eta_1; \eta_2) \wedge M \subseteqq V', \tag{13}$$

$$|\mathfrak{i}| < \eta_2 - \eta_1 \quad \text{für jedes } \mathfrak{i} \in V, \tag{14}$$

$$\sum_{\mathfrak{i}\in V} |\mathfrak{i}|^{\alpha} < (g+2)(\eta_2 - \eta_1)^{\alpha}. \tag{15}$$

Beweis. Sei n_0 so gewählt, daß

$$g^{-n_0} < \eta_2 - \eta_1 \leqq g^{-n_0+1} \tag{16}$$

ist, und sei V die Menge der Intervalle $\mathfrak{i}_{n_0} \in I_{n_0}$, die mit $(\eta_1; \eta_2)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dann gilt (13); denn wegen (5) ist $I'_{n_0} \geqq M$, und da alle Intervalle von V die Länge g^{-n_0} haben, gilt wegen (16) auch (14). Schließlich ergibt sich die Gültigkeit von (15) aus der Tatsache, daß die Anzahl der Elemente von V definitionsgemäß höchstens gleich

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{g^{-n_0}} + 2 \leqq g + 2$$

ist und folglich

$$\sum_{\mathfrak{i}\in V} |\mathfrak{i}|^{\alpha} \leqq (g+2)\, g^{-n_0\alpha} < (g+2)(\eta_2 - \eta_1)^{\alpha}$$

wird.

---

[7]) In der Bezeichnungsweise von [*11*].

[8]) Im wesentlichen von [*10*], Satz 31 übernommen.

Es werde nun angenommen, für irgendein α sei $\{M\}^\alpha < \infty$. Ist dann $R = \{\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots\}$ eine Menge von Intervallen derart, daß R' die abgeschlossene Hülle M^* überdeckt und daß

$$\sum_{\mathfrak{r} \in R} |\mathfrak{r}|^\alpha < c_1 \{M\}^\alpha \tag{17}$$

gilt[9]), so gibt es nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz eine endliche Untermenge $S = \{\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_l\}$ von R mit $S' \geqq M$, und wenn wir dann auf jedes Intervall $\mathfrak{s}_\lambda$ den Hilfssatz 1 anwenden, so sichert dieser die Existenz einer endlichen Untermenge $T = \{\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_m\}$ von I, für die $T' \geqq M$ und

$$\sum_{\mu=1}^{m} |\mathfrak{t}_\mu|^\alpha < (g+2) \sum_{\lambda=1}^{l} |\mathfrak{s}_\lambda|^\alpha$$

ist. Somit ergibt sich wegen (17)

$$\{M\}^\alpha > \frac{1}{c_1} \sum_{\mathfrak{r} \in R} |\mathfrak{r}|^\alpha \geqq \frac{1}{c_1} \sum_{\lambda=1}^{l} |\mathfrak{s}_\lambda|^\alpha \geqq c_2 \sum_{\mu=1}^{m} |\mathfrak{t}_\mu|^\alpha.$$

Also gibt es, wenn $M_\varkappa$ eine dem Fächer $\Xi_\varkappa$ g-adisch zugeordnete Menge ist, eine endliche Menge $T_\varkappa \subseteqq I$ mit $T_\varkappa' \geqq M_\varkappa$ und

$$\{M_\varkappa\}^\alpha > c_2(\varkappa) \sum_{\mathfrak{t} \in T_\varkappa} |\mathfrak{t}|^\alpha \qquad (\varkappa = 0, \ldots, k-1;\ M_0 = M). \tag{18}$$

Ist $\mathfrak{i}_n^j$ ein Intervall von I_n und $\varkappa(j) = \varkappa$ sein Typ, so ist die Menge $M \wedge \mathfrak{i}_n^j$ einer solchen Menge $M_\varkappa$ im Verhältnis $1 : g^n$ geometrisch ähnlich, wie aus der Definitionsbedingung c) der g-adischen Zuordnung hervorgeht. Daher gibt es eine Menge $T_{\varkappa n} \subseteqq I$, so daß $T_{\varkappa n}'$ zu einer solchen Menge $T_\varkappa'$ im Verhältnis $1 : g^n$ geometrisch ähnlich ist, ferner $T_{\varkappa n}' \geqq M \wedge \mathfrak{i}_n^j$ und schließlich wegen (18)

$$\{M \wedge \mathfrak{i}_n^j\}^\alpha = g^{-\alpha n} \{M_\varkappa\}^\alpha > c_2(\varkappa)\, g^{-\alpha n} \sum_{\mathfrak{t} \in T_\varkappa} |\mathfrak{t}|^\alpha \tag{19}$$

ist. Setzt man dann

$$c_3 = \min\big(c_2(0), \ldots, c_2(k-1)\big)$$

und $U_n = \bigvee_{j=1}^{h(n)} T_{\varkappa(j),n}$, so ist $U_n \subseteqq \bigvee_{\nu=n}^{\infty} I_\nu$, $U_n' \geqq M$ und wegen (19)

$$\sum_{\mathfrak{t} \in U_n} |\mathfrak{t}|^\alpha < \frac{1}{c_3} \sum_{j=1}^{h(n)} \{M \wedge \mathfrak{i}_n^j\}^\alpha = \frac{1}{c_3} \{M\}^\alpha; \tag{20}$$

letzteres weil nach (5) und (6) offenbar $M = \bigwedge_{\nu=n}^{\infty} I_\nu' \subseteqq I_n'$ und daher $M = \bigvee_{j=1}^{h(n)} (M \wedge \mathfrak{i}_n^j)$ ist. Weiter folgt aus der geometrischen Ähnlichkeit von $T_{\varkappa(j),n}'$ mit $T_\varkappa'$, daß es eine von n unabhängige Zahl $d \geqq 0$ gibt, so daß

$$U_n \subseteqq \bigvee_{\nu=n}^{n+d} I_\nu \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

[9]) Mit $c_1, \ldots, c_8$ bezeichnen wir positive Konstanten.

ist. Daher verkleinert sich die linke Seite von (20) höchstens, wenn jedes $T'_{\varkappa(j),n}$ durch eine Menge ersetzt wird, die aus einem einzigen, in $T'_{\varkappa(j),n}$ enthaltenen Intervall von I_{n+d} besteht. Aus U_n entsteht dadurch eine Menge W_n mit $W_n \subseteq I_{n+d}$ und

$$\sum_{t \in U_n} |t|^\alpha \geqq \sum_{t \in W_n} |t|^\alpha \geqq h(n)\, g^{-(n+d)\alpha} = c_4\, h(n)\, g^{-n\alpha},$$

so daß auf Grund von (20)

$$\{M\}^\alpha > c_5\, h(n)\, g^{-n\alpha}$$

folgt. Da aber nach Teil a)

$$h(n) = g^{n(\delta + o(1))}$$

ist, kann somit die obige Annahme $\{M\}^\alpha < \infty$ nur für $\alpha \geqq \delta$ gelten, und daraus folgt (12).

Kap. 2. Zahlenmengen mit ausgeschlossenen Sequenzen

§ 4. Die Mengen $K(F_1, \ldots, F_m; g)$

7. Ist $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ eine Menge von m (verschiedenen) g-adischen Sequenzen, so bezeichnen wir mit $K(F_1, \ldots, F_m; g) = K(\mathfrak{F}; g)$ die Menge der reellen Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$, bei derer g-adischer Entwicklung keine dieser Sequenzen auftritt. Solche ϱ wollen wir $\mathfrak{F}$-*frei* nennen. Zwischen $K(\mathfrak{F}; g)$ und den Mengen $K(F_\mu; g)$ der F_μ-freien Zahlen besteht dann offenbar die Beziehung

$$K(\mathfrak{F}; g) = \bigwedge_{\mu=1}^{m} K(F_\mu; g).$$

Bei den Mengen $\mathfrak{F}$ soll im folgenden stets vorausgesetzt werden, daß alle Sequenzen die gleiche Länge haben. Hinsichtlich der Mengen $K(\mathfrak{F}; g)$ bedeutet das keine Beschränkung der Allgemeinheit; denn wenn

$$\max(|F_1|, \ldots, |F_m|) = i$$

gesetzt wird, kann man jede einzelne Sequenz F_μ durch die Menge der g^{i-i_μ} Sequenzen der Form $G = F_\mu E$ mit $|E| = i - i_\mu$ ersetzen. Bezeichnet man das System der so aus sämtlichen F_μ erhaltenen Sequenzen G nach Streichung etwaiger mehrfach vorkommender mit $\{G_1, \ldots, G_q\} = \mathfrak{G}$, so ist $K(\mathfrak{F}; g) = K(\mathfrak{G}; g)$; denn wenn $\varrho \in K(\mathfrak{F}; g)$ ist, so ist ϱ definitionsgemäß $\mathfrak{F}$-frei und folglich erst recht $\mathfrak{G}$-frei, und wenn ϱ nicht zu $K(\mathfrak{F}; g)$ gehört, also etwa F_μ-haltig ist, so ist ϱ auch G_ν-haltig für geeignetes ν, d.h. ϱ gehört nicht zu $K(\mathfrak{G}; g)$.

In dieser Bezeichnungsweise ist stets $1 \leq m \leq g^i$, da es g^i Sequenzen der Länge i gibt. Wir setzen jedoch im folgenden $m < g^i$ voraus, da sonst $K(\mathfrak{F}; g)$ leer ist.

Ist $I_n = I_n(\mathfrak{F})$ die Menge aller Grundintervalle n-ter Stufe, in denen $\mathfrak{F}$-freie Zahlen liegen, so bezeichnen wir die Elemente von I_n wie in § 3 mit $\mathfrak{i}_n^1, \ldots, \mathfrak{i}_n^{h(n)}$, und wir ordnen jedem solchen Intervall $\mathfrak{i}_n^j$ umkehrbar eindeutig den Knotenpunkt A_n^j vom Index n eines Fächers $\Xi = \Xi(\mathfrak{F})$ zu, der der Bedingung genügen soll, daß genau dann A_n^r ein Knotenpunkt des Fächers

$\Xi(A_p^s)$ ist, wenn $i_n^r \leqq i_p^s$ gilt. Dadurch ist $\Xi(\mathfrak{F})$ eindeutig bestimmt, und es gilt

$$K(\mathfrak{F}; g) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n(\mathfrak{F})'.$$

Für irgendeine Sequenz E sei[10])

$$\varkappa = \max_{\mu=1,\ldots,m} t(E, F_\mu),$$

und ν sei der kleinste Wert von μ, für den dieses Maximum angenommen wird. Dann bezeichnen wir das geordnete Zahlenpaar $(\varkappa, \nu)$ als den Typ von E in bezug auf $\mathfrak{F}$, geschrieben $t(E, \mathfrak{F}) = (\varkappa, \nu)$. Sind $\Xi(A_n^r)$ und $\Xi(A_p^s)$ zwei Unterfächer von $\Xi(\mathfrak{F})$, für die in diesem Sinne

$$t(E_n^r, \mathfrak{F}) = t(E_p^s, \mathfrak{F})$$

ist, so gilt für jede beliebige Sequenz D der

Hilfssatz 2. Ist von den beiden Sequenzen $E_n^r D$ und $E_p^s D$ die eine $\mathfrak{F}$-frei, so auch die andere.

Beweis. Ist D nicht $\mathfrak{F}$-frei, so ist die Behauptung trivial. Bei $\mathfrak{F}$-freiem D ist, falls etwa $E_n^r D$ nicht $\mathfrak{F}$-frei, sondern z. B. F_μ-haltig ist, $E_n^r D$ von der Form $E_n^r D = A F_\mu B$. Dabei müssen die Ziffern von F_μ teils zu E_n^r und teils zu D gehören, da ja sowohl E_n^r als auch D nach Voraussetzung F_μ-frei sind. Somit ist $t(E_n^r, F_\mu) > 0$. Da aber

$$t(E_n^r, \mathfrak{F}) = t(E_p^s, \mathfrak{F})$$

und folglich auch $t(E_n^r, F_\mu) = t(E_p^s, F_\mu)$ ist, tritt F_μ auch bei $E_p^s D$ auf, nämlich in einem Exemplar, das sich aus den letzten $t(E_p^s, F_\mu)$ Ziffern von E_p^s und den ersten $|F_\mu| - t(E_p^s, F_\mu)$ Ziffern von D zusammensetzt.

Aus Hilfssatz 2 ist leicht zu folgern, daß die Unterfächer $\Xi(A_n^r)$ und $\Xi(A_p^s)$ gleich sind, falls die Sequenzen E_n^r und E_p^s vom gleichen Typ in bezug auf $\mathfrak{F}$ sind. Also ist $\Xi(\mathfrak{F})$ ein E-Fächer, und die Typengleichheit bei seinen Unterfächern im Sinne von § 2 entspricht der Typengleichheit in bezug auf $\mathfrak{F}$ bei den Sequenzen, die zu den Knotenpunkten von $\Xi(\mathfrak{F})$ gehören.

Die Klasse k von $\Xi(\mathfrak{F})$ ist somit höchstens gleich der Anzahl der verschiedenen Werte, die $t(E, \mathfrak{F})$ annimmt, wenn E alle $\mathfrak{F}$-freien Sequenzen durchläuft. Da dann, wenn wieder die Länge der F_μ mit i bezeichnet wird und $t(E, \mathfrak{F}) = (\varkappa, \nu)$ gesetzt wird, $0 \leqq \varkappa \leqq i-1$ und $1 \leqq \nu \leqq m$ ist, im Fall $\varkappa = 0$ aber nur der Wert $\nu = 1$ auftreten kann, wird somit

$$k \leqq (i-1)\, m + 1. \tag{21}$$

8. Diese Bemerkungen ermöglichen den Beweis von

Satz 3. Sei $h(\mathfrak{F}; n)$ die Anzahl der $\mathfrak{F}$-freien Sequenzen der Länge n. Dann existiert

$$\lim_{n\to\infty} h(\mathfrak{F}; n)^{1/n} = \gamma(\mathfrak{F}),$$

und es ist

$$\dim K(\mathfrak{F}; g) = \frac{\log \gamma(\mathfrak{F})}{\log g}.$$

[10]) Vgl. § 1, Bem. 7.

Beweis. Die Menge $K(\mathfrak{F};g)=\bigwedge_{n=0}^{\infty} I_n(\mathfrak{F})'$ ist dem E-Fächer $\Xi(\mathfrak{F})$ offenbar g-adisch zugeordnet im Sinne von § 3; denn die dortigen Definitionsbedingungen a), b), d) sind nach den obigen Überlegungen erfüllt, und die Gültigkeit von c) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß für irgend zwei Grundintervalle i_n^r und i_p^s mit den linken Endpunkten ωg^{-n} und λg^{-p} die Mengen $K(\mathfrak{F};g)\wedge i_n^r$ und $K(\mathfrak{F};g)\wedge i_p^s$ durch die Transformation

$$\varrho'=(\varrho-\omega g^{-n})\,g^{n-p}+\lambda g^{-p}$$

bzw. ihre Umkehrung ineinander übergehen, wenn die zugehörigen Sequenzen vom gleichen Typ sind. Somit ist der Satz 2 mit $h(n)=h(\mathfrak{F};n)$ anwendbar; denn die Ungleichung (7) ist erfüllt, da es für jede $\mathfrak{F}$-freie Sequenz S mit $|S|=a+b$ eine Zerlegung der Form $S=EG$ mit $|E|=a$, $|G|=b$ gibt, bei der E und G dann $\mathfrak{F}$-frei sind. Somit erhält man die Behauptung, wenn man in Satz 2 $e^{\chi}=\gamma(\mathfrak{F})$ setzt.

9. Betrachten wir nun die k-reihige Matrix $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\Xi(\mathfrak{F}))$, die dem E-Fächer $\Xi(\mathfrak{F})$ im Sinne von § 2 nach (21) zugeordnet werden kann. Sind $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$ $(q\leqq k)$ ihre (reellen oder komplexen) Eigenwerte und $v_1,\ldots,v_q$ deren Vielfachheiten $\left(\sum_{\varkappa=1}^{q} v_\varkappa=k\right)$, so folgt aus Satz 1 auf Grund der Theorie der linearen Differenzengleichungen[11]), daß die Funktion $h(\mathfrak{F};n)$ sich in der Form

$$h(\mathfrak{F};n)=P_1(n)\,\gamma_1^n+\cdots+P_q(n)\,\gamma_q^n \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{22}$$

darstellen läßt, wobei jedes $P_\varkappa(n)$ ein Polynom von einem Grade $\leqq v_\varkappa-1$ ist. Bezüglich dieser Darstellung gilt der

Satz 4. Wenn es unter den Eigenwerten $\gamma_\varkappa$ einen (einfachen oder mehrfachen) gibt, etwa γ_1, der positiv-reell und von größerem Betrag ist als alle übrigen, und wenn ferner das Polynom $P_1(n)$ nicht identisch verschwindet, ist $\gamma(\mathfrak{F})=\gamma_1$ und

$$\dim K(\mathfrak{F};g)=\frac{\log\gamma_1}{\log g}. \tag{23}$$

Beweis. Nach (22) gilt, wenn etwa $P_1(n)=\sigma_j n^j+\cdots+\sigma_0 n^0$ $(j\geqq 0,\ \sigma_j\neq 0)$ ist, die asymptotische Gleichung

$$h(\mathfrak{F};n)\simeq\gamma_1^n\left(\sigma_j n^j+P_2(n)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^n+\cdots+P_q(n)\left(\frac{\gamma_q}{\gamma_1}\right)^n\right)\simeq\sigma_j n^j\gamma_1^n,$$

woraus wegen $h(\mathfrak{F};n)\to+\infty$ offenbar $\sigma_j>0$ und daher

$$\gamma(\mathfrak{F})=\lim_{n\to\infty}h(\mathfrak{F};n)^{1/n}=\gamma_1$$

folgt. Die Gl. (23) ergibt sich somit aus Satz 3.

Als einfacher Spezialfall von Satz 4 erweist sich der [auch direkt zu beweisende und bereits bekannte[12])]

[11]) Siehe z. B. NÖRLUND [9], S. 297.

[12]) Soweit der Verfasser in Erfahrung bringen konnte, ist dieser Satz zwar nirgends in der Literatur explizit formuliert, doch war er mindestens 1941 bereits Herrn I. J. GOOD [5] bekannt.

Satz 5. Ist $m \leq g$ und ist $\mathfrak{F} = \{f_1, \ldots, f_m\}$ eine Menge[13]) von verschiedenen g-adischen Ziffern, so gilt

$$\dim K(\mathfrak{F}; g) = \frac{\log(g-m)}{\log g}.$$

Beweis. Offenbar ist $h(\mathfrak{F}; n) = (g-m)^n$, also $\gamma_1 = g - m$ im Sinne von Satz 4.

10. Bezeichnet man, wenn $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ eine Menge von m Sequenzen der gleichen Länge i ist, mit $\mathfrak{P}_{\mu\nu}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{P}_{\mu\nu} = \{p_{\mu\nu 1}, p_{\mu\nu 2}, \ldots, p_{\mu\nu c_{\mu\nu}}\}$ die (möglicherweise leere) Menge der Zahlen p, für die $0 < p < i$ und die Sequenz der ersten p Ziffern von F_μ der der letzten p Ziffern von F_ν gleich ist, so gilt der

Satz 6. Stimmen zwei Sequenzenmengen $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ und $\mathfrak{G} = \{G_1, \ldots, G_m\}$ in der Länge i und in den m^2 Mengen $\mathfrak{P}_{\mu\nu}(\mu, \nu = 1, \ldots, m)$ überein, so ist $\dim K(\mathfrak{F}; g) = \dim K(\mathfrak{G}; g)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $\gamma(\mathfrak{F})$ nur von der Länge i und den Mengen $\mathfrak{P}_{\mu\nu}$ abhängt. Dazu setzen wir voraus, daß die Elemente $p_{\mu\nu\lambda} \in \mathfrak{P}_{\mu\nu}$ $(\lambda = 1, \ldots, c_{\mu\nu})$ der Größe nach numeriert sind, und betrachten die Vereinigungen

$$\mathfrak{P}_\mu = \bigvee_{\nu=1}^{m} \mathfrak{P}_{\mu\nu} = \{p_{\mu 1}, \ldots, p_{\mu c_\mu}\} \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P} = \bigvee_{\mu=1}^{m} \mathfrak{P}_\mu = \{p_1, \ldots, p_c\},$$

in denen ebenfalls die Elemente jeweils der Größe nach numeriert sein sollen. Ferner sei $\mathfrak{N}_{\mu\lambda}$ die Menge der ν mit $p_{\mu\lambda} \in \mathfrak{P}_{\mu\nu}$ und $x_\mu(\mathfrak{F}; j, n) = x_\mu(j, n)$ die Anzahl der $\mathfrak{F}$-freien Sequenzen E mit $|E| = n$ und $t(E, F_\mu) = j$ $(\mu = 1, \ldots, m)$. Dann gilt offenbar für die Funktion $h(\mathfrak{F}; n) = h(n)$ die Gleichung

$$h(n+1) = g\,h(n) - \sum_{\mu=1}^{m} x_\mu(i-1, n) \qquad (n \geq i-1), \tag{24}$$

weil aus einer $\mathfrak{F}$-freien Sequenz E der Länge n genau dann durch Anfügen einer geeigneten Ziffer eine F_μ-haltige Sequenz entsteht, wenn $t(E, F_\mu) = i - 1$ ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Ist $\mathfrak{P}_\mu$ leer, so wird

$$x_\mu(i-1, n) = h(n-i+1) \qquad (n \geq i-1), \tag{25}$$

da dann einerseits für jede der $h(n-i+1)$ vorhandenen $\mathfrak{F}$-freien Sequenzen E mit $|E| = n-i+1$, wenn $F_\mu = f_1^\mu \ldots f_i^\mu$ ist, offenbar $E f_1^\mu \ldots f_{i-1}^\mu$ eine $\mathfrak{F}$-freie Sequenz der Länge n ist, also $h(n-i+1) \leq x_\mu(i-1, n)$ gilt, und andererseits stets $x_\mu(i-1, n) \leq h(n-i+1)$ ist. Insbesondere folgt für den Fall, daß $\mathfrak{P}$ leer ist, also (25) für jedes μ gilt, aus (24) die Differenzengleichung

$$h(n+1) = g\,h(n) - m\,h(n-i+1) \qquad (n \geq i-1). \tag{26}$$

[13]) Nicht zu verwechseln mit der Sequenz $F = f_1 \ldots f_m$.

b) Ist $\mathfrak{P}_\mu$ nicht leer, so braucht eine Sequenz der Form $E f_1^\mu \dots f_{i-1}^\mu$ mit $\mathfrak{F}$-freiem E nicht $\mathfrak{F}$-frei zu sein, sondern sie kann, wenn $\mathfrak{P}_{\mu\nu}$ nicht leer ist, eine Darstellung der Form

$$E f_1^\mu \dots f_{i-1}^\mu = B F_\nu f_{i-p+1}^\mu \dots f_{i-1}^\mu$$

besitzen, wobei dann $p \in \mathfrak{P}_{\mu\nu}$ ist. Daher erhält man statt (25)

$$(27) \quad x_\mu(i-1, n) = x_\mu(p_{\mu c_\mu} - 1, n - i + p_{\mu c_\mu}) - \sum_{\nu \in \mathfrak{R}_{\mu c_\mu}} x_\nu(i-1, n-i+p_{\mu c_\mu})$$

und entsprechend für $\lambda = 2, \dots, c_\mu$

$$(28) \quad \begin{cases} x_\mu(p_{\mu\lambda} - 1, n - i + p_{\mu\lambda}) = x_\mu(p_{\mu,\lambda-1} - 1, n - i + p_{\mu,\lambda-1}) - \\ \qquad - \sum_{\nu \in \mathfrak{R}_{\mu,\lambda-1}} x_\nu(i-1, n-i+p_{\mu,\lambda-1}) \end{cases}$$

sowie schließlich für $\lambda = 1$

$$(29) \quad x_\mu(p_{\mu 1} - 1, n - i + p_{\mu 1}) = h(n-i+1).$$

Setzt man die Gln. (28) und die Gl. (29) nacheinander in (27) ein, so erhält man

$$(30) \quad \begin{cases} x_\mu(i-1, n) = h(n-i+1) - \sum_{\lambda=1}^{c_\mu} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}_{\mu\lambda}} x_\nu(i-1, n-i+p_{\mu\lambda}) \\ \qquad (\mu = 1, \dots, m;\ n \geqq i-1), \end{cases}$$

also nach (24)

$$(31) \quad \begin{cases} h(n+1) = g\,h(n) - m\,h(n-i+1) + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{c_\mu} \sum_{\nu \in \mathfrak{R}_{\mu\lambda}} x_\nu(i-1, n-i+p_{\mu\lambda}) \\ \qquad (n \geqq i-1). \end{cases}$$

Für $0 \leq j \leq i-1$ ist trivialerweise

$$(32) \quad h(\mathfrak{F}; j) = h(\mathfrak{G}; j) \quad \text{und} \quad x_\mu(\mathfrak{F}; i-1; n) = x_\mu(\mathfrak{G}; i-1; n) \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

da ja $h(j) = g^j$ und

$$x_\mu(i-1; j) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leq j < i-1 \\ 1 \text{ für } j = i-1 \end{cases} \qquad (\mu = 1, \dots, m)$$

ist. Wenn aber die Gln. (32) für $j = 0, \dots, n$ mit $n \geqq i-1$ bewiesen sind, so folgt aus (31) ihre Gültigkeit für $j = n+1$, so daß für alle $n \geqq 1$, wie man entsprechend auch im Fall a) an Hand von (26) erkennt, $h(\mathfrak{F}; n) = h(\mathfrak{G}; n)$ ist. Daraus folgt die Behauptung nach Satz 3.

Übrigens kann man, indem man aus den $m+1$ Gln. (30) und (24) die m Funktionen $x_\mu(n)$ sukzessive eliminiert, eine Differenzengleichung gewinnen, in der nur noch die Funktion $h(n)$ auftritt: Verwendet man lineare Differenzenoperatoren $Q_{\mu\nu}$ der Form

$$Q_{\mu\nu} f(n) = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{j\mu\nu} f(n-j)$$

und schreibt man abkürzend $x_\mu(i-1, n) = x_\mu(n)$, so lassen sich die Gln. (30) zusammen als ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} Q_{11}\, x_1(n) + \cdots + Q_{1m}\, x_m(n) &= h(n-i+1) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\ Q_{m1}\, x_1(n) + \cdots + Q_{mm}\, x_m(n) &= h(n-i+1) \end{aligned}$$

darstellen. Da solche Operatoren bei Addition und Multiplikation einen Ring bilden, kann man auf dieses Gleichungssystem die Sätze der linearen Algebra anwenden. So erhält man, wenn

$$\begin{vmatrix} Q_{11} \cdots Q_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ Q_{m1} \cdots Q_{mm} \end{vmatrix} = Q$$

gesetzt und die mit dem Vorzeichen $(-1)^{\mu+\nu}$ versehene $(m-1)$-reihige Unterdeterminante des Elementes $Q_{\mu\nu}$ mit $Q^*_{\mu\nu}$ bezeichnet wird, die Gleichungen

$$Q\, x_\mu(n) = Q^*_\mu\, h(n-i+1) \qquad (\mu = 1, \ldots, m),$$

wobei

$$Q^*_\mu = Q^*_{1\mu} + \cdots + Q^*_{m\mu}$$

ist. Damit ergibt sich nach (24) die gesuchte Differenzengleichung in der Form

$$(33) \qquad Q\Big(\sum_{\mu=1}^{m} x_\mu(n)\Big) = \sum_{\mu=1}^{m} Q^*_\mu\, h(n-i+1) = g\,h(n) - h(n+1),$$

d.h.

$$(34) \qquad h(n+1) - g\,h(n) - \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} Q^*_{\mu\nu}\, h(n-i+1) = 0.$$

Als unmittelbare Folgerungen erhält man aus dem Beweis von Satz 6:

Folgerung 1. Sei $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & g-1 \\ \nu_0 & \nu_1 & & \nu_{g-1} \end{pmatrix}$ irgendeine Permutation der g-adischen Ziffern, die somit jede Sequenz $F = f_1 \ldots f_i$ in eine Sequenz $\Pi(F) = \nu_{f_1} \ldots \nu_{f_i}$ überführt. Dann ist

$$\dim K(F_1, \ldots, F_m; g) = \dim K(\Pi(F_1), \ldots, \Pi(F_m); g).$$

Folgerung 2. Wird für eine Sequenzenmenge $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ im Sinne von § 1, Bem. 6) $\widetilde{\mathfrak{F}} = \{\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_m\}$ gesetzt, so ist

$$\dim K(\mathfrak{F}; g) = \dim K(\widetilde{\mathfrak{F}}; g).$$

Denn es ist

$$\mathfrak{P}_{\mu\nu}(\widetilde{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{P}_{\nu\mu}(\mathfrak{F}) \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, m),$$

folglich auch $Q_{\mu\nu}(\widetilde{\mathfrak{F}}) = Q_{\nu\mu}(\mathfrak{F})$ und $Q^*_{\mu\nu}(\widetilde{\mathfrak{F}}) = Q^*_{\nu\mu}(\mathfrak{F})$, so daß die Differenzengleichung (34) für $h(\widetilde{\mathfrak{F}}; n)$ dieselbe ist wie für $h(\mathfrak{F}; n)$. Da offenbar beide Funktionen für $n = 0, \ldots, i-1$ übereinstimmen, ergibt sich die Behauptung nach Satz 3.

Folgerung 3. Die Folgerungen 1 und 2 können kombiniert werden.

Folgerung 4. Sei $\mathfrak{F}=\{F_1, \ldots, F_m\}$ und $C(\mathfrak{F}; g)$ die Menge der Zahlen ϱ, in deren g-adischer Ziffernfolge jede der Sequenzen F_μ nur endlich oft auftritt. Dann ist

$$\dim C(\mathfrak{F}; g) = \dim K(\mathfrak{F}; g).$$

Denn ist $\varrho \in C(\mathfrak{F}; g)$, so ist ϱ von einer gewissen Stelle an $\mathfrak{F}$-frei, also von der Form

$$\varrho = k g^{-n} + \varrho', \quad k, n \text{ nichtnegativ}, \quad \varrho' \in K(\mathfrak{F}; g),$$

und somit ist $C(\mathfrak{F}; g)$ in einer Vereinigung von abzählbar vielen Mengen enthalten, die sämtlich aus $K(\mathfrak{F}; g)$ durch Translation hervorgehen und daher dieselbe Dimension wie $K(\mathfrak{F}; g)$ haben. Daraus folgt die Behauptung.

11. Im folgenden soll die Frage beantwortet werden, für welche $\mathfrak{F}$ die Dimension von $K(\mathfrak{F}; g)$ verschwindet. Dazu führen wir einige weitere Begriffe ein:

Ist S eine gegebene Sequenz, so bezeichnen wir die Menge aller $|S|$ Sequenzen, die aus S durch zyklische Vertauschung der Ziffern entstehen, als *Zyklus* $\mathfrak{Z}(S)$.

Ein Zyklus heiße $\mathfrak{F}$-frei, wenn jedes seiner Elemente $\mathfrak{F}$-frei ist. Dann gilt der

Hilfssatz 3. Ist S eine Sequenz mit $|S| \geqq i$ und P die Sequenz der ersten $i-1$ Ziffern von S, so ist der Zyklus $\mathfrak{Z}(S)$ genau dann $\mathfrak{F}$-frei, wenn die Sequenz SP es ist.

Beweis. Für jede Sequenz $S_1 \in \mathfrak{Z}(S)$ gibt es eine Darstellung der Form $SS = E_1 S_1 E_2$. Folglich gibt es, falls S_1 nicht $\mathfrak{F}$-frei, sondern z.B. F_μ-haltig ist, eine Gleichung der Form

$$SS = E_3 F_\mu E_4. \tag{35}$$

Gehören dabei die Ziffern von F_μ ganz zum ersten oder ganz zum zweiten Exemplar von S, so ist S und damit auch SP nicht $\mathfrak{F}$-frei. Letzteres trifft aber wegen $|P| = |F_\mu| - 1$ auch in dem übrigbleibenden Fall zu, wo die Ziffern von F_μ sich auf beide Exemplare von S verteilen. Daraus folgt die Behauptung; denn umgekehrt ist evident, daß es bei nicht $\mathfrak{F}$-freiem SP eine nicht $\mathfrak{F}$-freie Sequenz $S_1 \in \mathfrak{Z}(S)$ gibt.

Zwei Zyklen $\mathfrak{Z}(S)$ und $\mathfrak{Z}(T)$ nennen wir *wesentlich verschieden*, wenn es weder eine Sequenz von $\mathfrak{Z}(T)$ gibt, die ein Vielfaches[14]) von S ist, noch umgekehrt. In dieser Bezeichnungsweise gilt der

Satz 7. Dann und nur dann ist $\dim K(\mathfrak{F}; g) = 0$, wenn es keine zwei Sequenzen S und T mit $|S| \geqq i$, $|T| \geqq i$ gibt, die in ihren ersten $i-1$ Ziffern übereinstimmen, derart, daß die Zyklen $\mathfrak{Z}(S)$ und $\mathfrak{Z}(T)$ wesentlich verschieden und beide $\mathfrak{F}$-frei sind. Falls die Dimension von $K(\mathfrak{F}; g)$ verschwindet, ist diese Menge höchstens abzählbar.

[14]) Vgl. § 1, Bem. 5).

Beweis. a) Angenommen, es gibt Sequenzen S und T mit den geforderten Eigenschaften. Dann gibt es Sequenzen P, A, B mit

$$S = PA, \; T = PB \quad \text{und} \quad |P| = i - 1.$$

Daher sind die Sequenzen $C = ST$ und $D = TS$ wegen $C = PAPB$ und $D = PBPA$ beide $\mathfrak{F}$-frei, wie aus Hilfssatz 3 folgt, da ja die Zyklen $\mathfrak{Z}(PA)$ und $\mathfrak{Z}(PB)$ nach Voraussetzung $\mathfrak{F}$-frei sind. Ist $|S| = q$, $|T| = r$, also $|C| = |D| = q + r$, so entsprechen die Sequenzen C und D im g^{q+r}-adischen System je einer einzigen Ziffer, die wir wieder mit C bzw. D bezeichnen. Ist dann K die Menge aller ϱ, in deren g^{q+r}-adischer Entwicklung ausschließlich die beiden Ziffern C und D auftreten, so gilt $K \subseteq K(\mathfrak{F}; g)$, wie sich bei der Umformung der g^{q+r}-adischen in g-adische Entwicklungen auf Grund der Tatsache ergibt, daß die Sequenzen CC, CD, DC, DD sämtlich $\mathfrak{F}$-frei sind. Daher wird nach Satz 5

$$\dim K(\mathfrak{F}; g) \geqq \dim K = \frac{\log 2}{\log (g^{q+r})} > 0.$$

b) Angenommen, es gibt keine zwei Sequenzen S und T mit den geforderten Eigenschaften. Da es in jeder g-adischen Ziffernfolge eine Sequenz der Länge i gibt, die unendlich oft auftritt, gibt es für jede Zahl $\varrho \in K(\mathfrak{F}; g)$ eine $\mathfrak{F}$-freie Sequenz J mit $|J| = i$, derart, daß ihre g-adische Ziffernfolge von der Form

$$U_0 J U_1 J U_2 J \ldots \tag{36}$$

ist, wobei die U_ν irgendwelche (möglicherweise leeren) $\mathfrak{F}$-freien Sequenzen sind. Dann ist $\mathfrak{Z}(JU_\nu)$ nach Hilfssatz 3 für $\nu = 1, 2, \ldots$ ein $\mathfrak{F}$-freier Zyklus, da wegen $\varrho \in K(\mathfrak{F}; g)$ für positives ν sowohl JU_ν als auch $U_\nu J$ eine $\mathfrak{F}$-freie Sequenz ist und $|J| = i$ gilt. Somit können nach Voraussetzung unter den Zyklen $\mathfrak{Z}(JU_\nu)$ keine zwei wesentlich verschiedenen sein. Setzt man nun bei der Darstellung (36) noch voraus, daß

$$t(U_\nu, J) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, was offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, so ergibt sich, daß die Sequenzen JU_ν mit positivem ν sogar alle gleich sein müssen. Somit ist $U_1 = U_2 = \cdots = U$, und (36) hat die Form $U_0 JUJUJU \ldots$, d.h. die g-adische Entwicklung von ϱ ist von einer Stelle an periodisch. Daher ist $K(\mathfrak{F}; g)$ eine Menge von rationalen Zahlen und als solche höchstens abzählbar.

§ 5. Der Fall $m = 1$

12. Besteht die Menge $\mathfrak{F}$ nur aus einer einzigen Sequenz $F = f_1 \ldots f_i$, so schreiben wir $K(F; g) = K(f_1 \ldots f_i; g)$ statt $K(\mathfrak{F}; g)$. Für solche Mengen $K(F; g)$ lassen sich die Ergebnisse von § 4 noch verschärfen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Sei $\Xi = \Xi(F)$ der E-Fächer, dem die Menge $K(F; g)$ im Sinne von § 3 g-adisch zugeordnet ist. Dann gilt für die Klasse k von Ξ nach (21) die

Bedingung $k \leq i$; doch ist sogar $k = i$; denn sind E_1 und E_2 Sequenzen mit $t(E_1, F) \neq t(E_2, F)$, so kann man stets eine Sequenz G so angeben, daß von den Sequenzen E_1G und E_2G die eine F-frei, die andere dagegen F-haltig ist, und somit sind die zugehörigen Unterfächer verschieden, d.h. die Anzahl der verschiedenen Unterfächer von Ξ ist gleich der Anzahl der Werte von $t(E, F)$ für irgendwelche F-freien E. Daher numeriert man zweckmäßig die Unterfächer $\Xi_0, \ldots, \Xi_{i-1}$ so, daß für jeden Knotenpunkt A der Typ des Unterfächers $\Xi(A)$ mit dem Typ der zu A gehörenden Sequenz in bezug auf F übereinstimmt.

Die Matrix $\mathfrak{A}(\Xi(F))$, die dem E-Fächer Ξ im Sinne von § 2 zugeordnet werden kann, ist somit i-reihig und läßt sich leicht explizit angeben: das Matrixelement $a_{\varkappa\lambda}$ ist gleich der Anzahl der g-adischen Ziffern f mit

$$t(f_0 \ldots f_\lambda f, F) = \varkappa \qquad (\varkappa, \lambda = 0, \ldots, i-1; f_0 = \text{leere Sequenz}). \tag{37}$$

Daher ist $0 \leq a_{\varkappa\lambda} < g$ für alle $\varkappa$ und λ, ferner

$$\sum_{\varkappa=0}^{i-1} a_{\varkappa\lambda} = \begin{cases} g-1 & \text{für } \lambda = i-1 \\ g & \text{für } 0 \leq \lambda < i-1, \end{cases}$$

da bei festem λ von den g Sequenzen der Form $f_0 \ldots f_\lambda f$ entweder alle oder alle bis auf eine F-frei sind, je nachdem ob $\lambda = i-1$ ist oder nicht[15]).

Da der Grad eines Knotenpunktes vom Typ λ offenbar den Wert $1 + \sum_{\varkappa=0}^{i-1} a_{\varkappa\lambda}$ hat, ist somit jeder Knotenpunkt von Ξ vom Grad g oder $g+1$. Daher ist $g = 2$, falls in dem Fächer $\Xi(F)$ eine Rute[16]), d.h. ein unendlich langer Weg mit lauter Knotenpunkten vom Grad 2, auftritt. Ist dies bei einer dyadischen Sequenz $F = f_1 \ldots f_i$ der Fall, so nennen wir sie *direkt entartet* und die Sequenz $\widetilde{F} = f_i \ldots f_1$ *indirekt entartet*. Als *entartet* bezeichnen wir eine dyadische Sequenz, wenn sie entweder direkt oder indirekt entartet ist.

Hilfssatz 4. a) Ist $g = 2$ und $|F| = 1$, so ist F entartet.

b) Ist $g = 2$ und $|F| = i > 1$, so ist F dann und nur dann direkt entartet, wenn

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_{i-1} \neq f_i \tag{38}$$

gilt.

Beweis. Teil a) ist evident. Zum Beweis von Teil b) beachte man, daß, wenn F direkt entartet ist, alle Knotenpunkte auf der voraussetzungsgemäß in Ξ vorhandenen Rute vom Typ $i-1$ sein müssen. Demnach gilt, wenn f

[15]) Beispiel: Ist $g = 2$, $i = 6$, $F = 110111$, so erhält man auf Grund von (37)

$$\mathfrak{A}(\Xi(F)) = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

[16]) Dieser Begriff stammt von TH. KALUZA [7].

die von f_i verschiedene dyadische Ziffer ist, nach (37)

$$t(f_1 \dots f_{i-1} f, F) = i - 1,$$

woraus $f_1 \dots f_{i-1} = f_2 \dots f_{i-1} f$ und damit (38) folgt.

Eine direkt entartete dyadische Sequenz hat also die Form $11 \dots 10$ oder $00 \dots 01$, eine indirekt entartete die Form $01 \dots 11$ oder $10 \dots 00$. Die beiden dyadischen Sequenzen $F = 0$ und $F = 1$ der Länge 1 sind somit sowohl direkt als auch indirekt entartet. Wir lassen sie im folgenden außer Betracht, da im Sinne von (1) die Menge $K(1; 2)$ leer ist und $K(0; 2)$ nur das Element 1 hat. Im übrigen gilt der

Satz 8. Ist $i > 1$ und $F = f_1 \dots f_i$ eine direkt entartete dyadische Sequenz, so ist die Menge

$$D = K(f_1 \dots f_i; g) - K(f_1 \dots f_{i-1}; g)$$

höchstens abzählbar.

Beweis. Ist $\varrho \in D$, so tritt bei ϱ die Sequenz $f_1 \dots f_{i-1}$, nicht aber die Sequenz $f_1 \dots f_i$ auf. Also müssen wegen (38) alle auf das erste solche Exemplar von $f_1 \dots f_{i-1}$ folgenden Ziffern von ϱ gleich der von f_i verschiedenen dyadischen Ziffer sein, d.h. ϱ ist von der Form

$$\varrho = 0, E f_1 \dots f_{i-1} f f f \dots, \tag{39}$$

wo E eine $(f_1 \dots f_{i-1})$-freie Sequenz ist, und das trifft für höchstens abzählbar viele ϱ zu. Wie man an Hand von (39) leicht bestätigt, ist D effektiv eine abzählbare Menge, wenn F von 01 verschieden ist; sonst ist D leer.

Setzt man (im Sinne von § 4) $\mathfrak{F} = \{F_1\} = \{F\}$ und $\mathfrak{P}_{11} = \mathfrak{P}(F) = \{p_1, \dots, p_c\}$, so gilt der

Satz 9. Sind $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ die Lösungen der Gleichung[17])

$$z^i - g z^{i-1} + \sum_{\lambda=1}^{c} z^{p_\lambda} - g \sum_{\lambda=1}^{c} z^{p_\lambda - 1} + 1 = 0, \tag{40}$$

so gibt es unter ihnen eine einfache, etwa $\gamma_1 = \gamma(F)$, mit $\gamma(F) > 0$ derart, daß, wenn $\alpha = \dfrac{\log \gamma(F)}{\log g}$ und

$$\tau(F) = \prod_{j=2}^{i} \frac{g - \gamma_i}{\gamma - \gamma_j} \tag{41}$$

gesetzt wird, im Fall[18]) $\alpha > 0$

$$\frac{\gamma(F)}{g} \leqq \{K(F; g)\}^\alpha \leqq \tau(F) \tag{42}$$

und im Fall $\alpha = 0$ die Menge $K(F; g)$ höchstens abzählbar, also in beiden Fällen $\dim K(F; g) = \alpha$ ist.

13. Für den Beweis benötigen wir die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 5. Die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi(F))$ ist (40).

---

[17]) Bei leerem $\mathfrak{P}$ sind die Summen durch 0 zu ersetzen.

[18]) $\{M\}^\alpha$ bezeichnet das α-dimensionale Hausdorffsche Maß der Menge M; vgl. Nr. 5.

Beweis. Sei $x(n)$ die Anzahl der F-freien Sequenzen E mit $|E|=n$ und $t(E,F)=i-1$. Dann gilt für die Anzahl $h(n)$ der F-freien Sequenzen der Länge n nach (24)

$$h(n+1)=g\,h(n)-x(n) \qquad (n\geqq i-1). \tag{43}$$

Ist $\mathfrak{P}(F)$ leer, so ist nach (26)

$$h(n+1)=g\,h(n)-h(n-i+1) \qquad (n\geqq i-1). \tag{44}$$

Andernfalls folgt aus (30)

$$x(n)=h(n-i+1)-\sum_{\lambda=1}^{c}x(n-i+p_\lambda).$$

Setzt man hierin gemäß (43)

$$x(n-i+p_\lambda)=g\,h(n-i+p_\lambda)-h(n+1-i+p_\lambda),$$

so erhält man die für $n\geqq i-1$ gültige Gleichung

$$h(n+1)=g\,h(n)-\sum_{\lambda=1}^{c}h(n+1-i+p_\lambda)+g\sum_{\lambda=1}^{c}h(n-i+p_\lambda)-h(n-i+1). \tag{45}$$

Aus (44) und (45) folgt die Behauptung nach Satz 1.

Hilfssatz 6. Ist $F=f_1\ldots f_i$ nicht entartet, so gibt es zu jedem F-freien E mit $t(E,F)=i-1$ ein E' mit $|E'|=i-1$, so daß EE' eine F-freie Sequenz mit $t(EE',F)=0$ wird.

Beweis. Für $i=1$ ist die Behauptung bei jedem F-freien E' erfüllt. Ist $i>1$, so genügt es offenbar, den Beweis für die Sequenz $E=f_1\ldots f_{i-1}$ zu erbringen. Falls $g=2$ und $f_1=f_i$ oder falls $g\geqq 3$ ist, gibt es eine Ziffer e mit $f_1\neq e\neq f_i$. Daher hat die Sequenz $E'=e\,e\ldots e$ mit $|E'|=i-1$ die geforderten Eigenschaften.

In dem übrigbleibenden Fall $g=2$, $f_1\neq f_i$ setzen wir voraus, daß

$$f_1=0, \quad f_i=1 \tag{46}$$

ist; der umgekehrte Fall ergibt sich aus den folgenden Betrachtungen, wenn überall 0 und 1 vertauscht werden. Da für $i=2$ und $i=3$ alle dyadischen Sequenzen mit (46), nämlich 01 sowie 001 und 011, entartet sind, kann ferner $i\geqq 4$ vorausgesetzt werden. Wir bezeichnen mit $a\geqq 1$ die Länge der längsten „Kette" von aufeinanderfolgenden Einsen in F und mit $b\geqq 0$ den Typ der Sequenz E in bezug auf die Sequenz $N=00\ldots00$ mit $|N|=i-1$. Dann ist, da F nicht entartet ist, $a<i-1$ und $b<i-1$, wie aus (46) folgt. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) Enthält F nur eine einzige Kette von Einsen, so muß F wegen (46) von der Form

$$f_j=\begin{cases}0 & \text{für} \quad 1\leqq j\leqq i-a\\ 1 & \text{für} \quad i-a<j\leqq i\end{cases}$$

sein. Hierin ist $a>1$ und $i-a>1$, weil F sonst entartet wäre. Setzt man daher $E'=01$, so ist $EE'=f_1\dots f_{i-1}01-\underbrace{00\dots0}_{i-a}\underbrace{11\dots1}_{a-1}01$ und somit sicher $t(EE',F)=0$.

b) Enthält F mehr als eine Kette von Einsen, so ist $a\leq i-3$; denn außer der Kette der Länge a gibt es unter den i Ziffern von F wenigstens noch: eine weitere Kette von mindestens einer Eins, mindestens eine Null zwischen beiden Ketten und die Ziffer $f_1=0$. Folglich wird, wenn wir $E'=0\underbrace{11\dots1}_{a+1}$ setzen, $|E'|=a+2\leq i-1$. Dann ist EE', wie gezeigt werden soll, F-frei. Ein etwa auftretendes Exemplar von F könnte nicht aus den letzten i Ziffern von EE' bestehen, weil F keine Kette von Einsen der Länge $a+1$ enthält. Also müßten auch Einsen dieses Exemplars von F in E liegen. Das ist jedoch ausgeschlossen, weil die am weitesten rechts gelegene Kette von Nullen in EE' nach der Definition von b die Länge $b+1$ hat, wegen ihrer Lage in F aber die Länge b haben müßte.

Wäre nun $t(EE',F)>0$, so müßte wegen $f_1=0$ offenbar $t(EE',F)>a+1$ sein, was aber unmöglich ist, da F sonst eine Kette von $a+1$ Einsen enthalten müßte. Also ist, wie gefordert, $t(EE',F)=0$.

Hilfssatz 7. Ist $F=f_1\dots f_i$ nicht entartet und $n\geq 3(i-1)$, so gibt es zu jeder F-freien Sequenz E und jedem $\varkappa$ mit $0\leq\varkappa\leq i-1$ ein E' mit $|E'|=n$, so daß EE' ebenfalls F-frei und $t(EE',F)=\varkappa$ ist.

Beweis. Ist $t(E,F)=\lambda$, so setzen wir $E_1=f_{\lambda+1}\dots f_{i-1}$, so daß also $|E_1|\leq i-1$ und $t(EE_1,F)=i-1$ ist. Folglich gibt es nach Hilfssatz 6 ein E_2 mit $|E_2|\leq i-1$, so daß $t(EE_1E_2,F)=0$ ist. Bezeichnen wir, wenn f eine Ziffer $+f_1$ ist, mit E_3 die Sequenz $00\dots0$ der Länge $n-\varkappa-|E_1|-|E_2|$, die ja wegen $n\geq 3(i-1)$ nichtnegativ ausfällt, so ist $t(EE_1E_2E_3,F)=0$ und ferner $|E_1E_2E_3|=n-\varkappa$. Daher hat, wenn wir $E_4=f_1\dots f_\varkappa$ setzen, die Sequenz $E'=E_1E_2E_3E_4$ die geforderten Eigenschaften.

Hilfssatz 8. Ist $n\geq 3(i-1)$, so sind alle Elemente der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi(F))^n$ positiv.

Beweis. Bezeichnet man die Elemente von $\mathfrak{A}(\Xi(F))^n$ wieder mit $a_{\varkappa\lambda}^{(n)}$ $(\varkappa,\lambda=0,\dots,i-1)$, so ergibt sich aus (2) auf Grund der Konstruktion des Fächers $\Xi(F)$, daß für jedes feste F-freie E mit $t(E,F)=\lambda$ das Matrixelement $a_{\varkappa\lambda}^{(n)}$ gleich der Anzahl der F-freien Sequenzen der Form EE' mit $|E'|=n$ und $t(EE',F)=n$ ist. Nach Hilfssatz 7 ist diese Anzahl für $n\geq 3(i-1)$ positiv.

Hilfssatz 9. Ist $\mathfrak{M}$ eine Matrix mit positiven Elementen, so gibt es unter den Eigenwerten von $\mathfrak{M}$ einen, der positiv-reell, einfach und von größerem Absolutbetrag als alle übrigen ist.

Beweis. Siehe Frobenius [4].

Hilfssatz 10. Die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{M}^n$ sind die n-ten Potenzen der Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{M}$.

Beweis. Siehe z.B. MacDuffee [2], Theorem 16.1.

Hilfssatz 11. In der Bezeichnungsweise von Satz 9 ist, falls $\gamma(F) \neq 1$ ist,

$$h(n) = \gamma(F)^n \left(\tau(F) + o(1)\right).$$

Beweis. a) Sei F nicht entartet. Dann ist nach den Hilfssätzen 5, 8, 9 und 10 für $n \geqq 3(i-1)$, wenn $\xi_1, \ldots, \xi_q$ die verschiedenen Eigenwerte von $\mathfrak{A}(\Xi(F))^n$ und $v_1, \ldots, v_q$ ihre Vielfachheiten $\left(\sum_{j=1}^{q} v_j = i\right)$, ferner $\gamma_1, \ldots, \gamma_{q'}$ die verschiedenen Eigenwerte von $\mathfrak{A}(\Xi(F))$ und $v_1', \ldots, v_{q'}'$ deren Vielfachheiten sind, bei geeigneter Numerierung

$$q = q', \quad v_j = v_j' \quad \text{und} \quad \xi_j = \gamma_j^n \qquad (j = 1, \ldots, q),$$

ferner ist ξ_1 positiv-reell, und es gilt $v_1 = 1$ sowie

$$|\xi_j| < \xi_1 \qquad (j = 2, \ldots, q).$$

Daraus folgt, daß auch $\gamma_1 = \gamma(F)$ positiv-reell ist und

$$|\gamma_j| < \gamma_1 \qquad (j = 2, \ldots, q) \tag{47}$$

gilt. Wie aus (22) folgt, läßt sich $h(n)$ somit in der Form

$$h(n) = \sigma \gamma_1^n + P_2(n)\gamma_2^n + \cdots + P_q(n)\gamma_q^n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{48}$$

darstellen, wo $P_j(n)$ ein Polynom von einem Grade $< v_j$ ist. Aus (48) und (47) folgt

$$h(n) = \gamma_1^n \left(\sigma + P_2(n)\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^n + \cdots + P_q\left(\frac{\gamma_q}{\gamma_1}\right)^n\right) = \gamma_1^n \left(\sigma + o(1)\right). \tag{49}$$

Zur Bestimmung von σ setzen wir zunächst voraus, daß die Vielfachheiten v_j alle den Wert 1 haben, also $q = i$ ist und somit die Polynome $P_j(n)$ sämtlich konstant sind. Da für $0 \leq n \leq i-1$ offenbar $h(j) = g^j$ ist, wird also $\sigma = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, wenn wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} g^0 & \gamma_2^0 & \cdots & \gamma_i^0 \\ g^1 & \gamma_2^1 & \cdots & \gamma_i^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ g^{i-1} & \gamma_2^{i-1} & \cdots & \gamma_i^{i-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \cdots & \gamma_i^0 \\ \gamma_1^1 & \gamma_2^1 & \cdots & \gamma_i^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_1^{i-1} & \gamma_2^{i-1} & \cdots & \gamma_i^{i-1} \end{vmatrix}$$

setzen; denn Δ ist als Differenzenprodukt der γ_j in diesem Fall sicher $\neq 0$. Ferner ist $\Delta_1 = \prod_{i=2}^{i} (g - \gamma_j) \prod_{j,l=2}^{i} (\gamma_j - \gamma_l)$ und daher

$$\sigma = \prod_{j=2}^{i} \frac{g - \gamma_j}{\gamma_1 - \gamma_j} = \tau(F).$$

Wie eine Stetigkeitsbetrachtung zeigt, bleibt diese Gleichung auch bestehen, wenn die Wurzeln $\gamma_2, \ldots, \gamma_i$ nicht alle verschieden sind, und somit folgt (46) aus (49). Insbesondere ist $\tau(F) > 0$, da im Fall $\tau(F) = 0$ eine der Wurzeln $\gamma_i = g$ sein müßte, während doch die linke Seite von (40) für $z = g$ den Wert 1 annimmt, und da der Fall $\tau(F) < 0$ wegen $h(n) \to +\infty$ ausgeschlossen ist.

b) Ist F direkt entartet, so ist $\mathfrak{P}(F)$ leer und daher, wenn man die linke Seite von (40) mit $\varphi(F;z)$ bezeichnet,

$$\varphi(f_1 \dots f_i; z) = z^i - 2z^{i-1} + 1 - \left(z^{i-1} - \sum_{j=0}^{i-2} z^j\right)(z-1) = \varphi(f_1 \dots f_{i-1}; z)\,(z-1).$$

Daher ist nach (48)

$$h(f_1 \dots f_i; n) = h(f_1 \dots f_{i-1}; n) + c_6.$$

Hieraus folgt im Fall $i \geqq 3$, wo die Sequenz $f_1 \dots f_{i-1}$ nicht entartet und also schon unter a) mitbehandelt ist, die Behauptung. Die Fälle $i=2$ und $i=1$ führen auf den oben ausgeschlossenen Wert $\gamma_1 = 1$.

c) Ist F indirekt entartet, also $\tilde{F}$ direkt entartet, so folgt die Behauptung aus b), da die Funktionen $h(F;n)$ und $h(\tilde{F};n)$ derselben Differenzengleichung mit denselben Anfangsbedingungen genügen und folglich identisch sind.

Hilfssatz 12. Für die Funktionen $h_\varkappa(F;n)$ des Fächers $\Xi(F)$ im Sinne von Satz 1 ist

$$h_\varkappa(F;n) \leqq h(F;n) \quad (\varkappa = 0, \dots, i-1;\ h_0(F;n) = h(F;n)),$$

und es gibt eine Konstante $\tau_\varkappa$ mit $0 \leqq \tau_\varkappa \leqq \tau(F)$ und $h_\varkappa(n) = \gamma_1^n\,(\tau_\varkappa + o(1))$.

Beweis. Sei E mit $t(E,F) = \varkappa$ eine feste F-freie Sequenz. Dann ist $h_\varkappa(F;n)$ die Anzahl der Sequenzen E' mit $|E'| = n$ und F-freiem EE'. Da jedes solche E' selbst F-frei ist, folgt $h_\varkappa(F;n) \leqq h(F;n)$. Die zweite Behauptung läßt sich unter Verwendung von Satz 1 genau so wie Hilfssatz 11 beweisen.

Hilfssatz 13[19]. Ist $0 < \delta \leqq 1$ und M eine abgeschlossene beschränkte lineare Punktmenge mit $\{M\}^\delta < \infty$, so ist dann und nur dann $\{M\}^\delta > 0$, wenn es eine nichtnegative additive Funktion $\Phi(R)$ von halboffenen Intervallmengen[20]) gibt, für die folgendes gilt:

a) Für jede halboffene Intervallmenge R ist $\Phi(R) \leqq c_7 |R|^\delta$.

b) Für jede halboffene Intervallmenge R mit $R' \supseteqq M$ ist $\Phi(R) \geqq c_8$.

Dann ist nämlich $\{M\}^\delta \geqq \frac{c_8}{c_7}$.

Beweis. Siehe Moran [8], Theorem I.

14. Nach diesen Hilfsbetrachtungen erbringen wir nunmehr den

Beweis von Satz 9. Ist $\gamma(F) = 1$, so folgt aus (40), daß

$$1 - g + c(1-g) + 1 = 0,$$

d.h. $(g-1)(c+1) = 1$ und folglich $g = 2$, $c = 0$ ist. Also ist $\mathfrak{P}(F)$ leer, und (40) nimmt die Gestalt $z^i - 2z^{i-1} + 1 = 0$ an. Dieses Polynom hat offenbar genau dann $\gamma_1 = 1$ als größte Nullstelle, wenn $i = 1$ oder $i = 2$ ist. Man erhält so die vier Mengen[21])

$$K(1;2),\ K(0;2),\ K(01;2) \text{ und } K(10;2), \tag{50}$$

[19]) Wir spezialisieren den Satz hier auf den Fall α-dimensionaler Maße und linearer Mengen.

[20]) Unter einer halboffenen Intervallmenge wird eine Menge von endlich vielen halboffenen Intervallen verstanden.

[21]) Vgl. [12], Satz 5.

von denen die erste leer und die vierte abzählbar sind, während die zweite und dritte nur das Element 1 enthalten.

Sei im folgenden $\gamma(F)=\gamma_1>1$ vorausgesetzt[22]). Dann ist, da die in Nr. 7 eingeführte Menge $I_n(F)'$ eine g^{-n}-Überdeckung von $K(F;g)$ bildet, nach Hilfssatz 11

$$\{K(F;g)\}^\alpha \leqq \lim_{n\to\infty} h(n)\, g^{-n\alpha} = \lim_{n\to\infty} \gamma_1^{-n}\, g^{-n\alpha}\big(\tau + o(1)\big) = \tau(F). \tag{51}$$

Zu dem noch fehlenden Nachweis[23]) von

$$\{K(F;g)\}^\alpha \geqq \frac{\gamma(F)}{g} \tag{52}$$

soll gezeigt werden, daß Hilfssatz 13 auf die abgeschlossene Hülle $K(F;g)^*$ von $K(F;g)$ mit $\delta=\alpha$ anwendbar ist. Da die Voraussetzung $\{M\}^\delta<\infty$ nach (51) erfüllt ist, bleibt nur die Existenz einer Funktion $\Phi(R)$ mit den geforderten Eigenschaften zu zeigen. Dazu definieren wir für jedes Intervall $\mathfrak{i}_n^r$ die Funktion $\psi(\mathfrak{i}_n^r)=\gamma_1^{-n}$ und setzen für jede halboffene Intervallmenge R

$$\Phi(R) = \lim_{n\to\infty} \sum_r \psi(\mathfrak{i}_n^r),$$

wobei über alle $\mathfrak{i}_n^r \in I_n$ summiert wird, deren innere Punkte sämtlich in R liegen. Um zu zeigen, daß dieser Grenzwert existiert, gehen wir in mehreren Schritten vor:

1) Sei R ein Intervall von I_j. Ist R dann etwa vom Typ $\varkappa$, so ist die Anzahl der darin enthaltenen Intervalle von I_n $(n\geqq j)$ offenbar $h_\varkappa(n-j)$, und folglich existiert nach Hilfssatz 12 der Grenzwert

$$\Phi(R) = \lim_{n\to\infty} h_\varkappa(n-j)\,\gamma_1^{-n} = \tau_\varkappa \gamma_1^{-j} \leqq \tau(F)\,\gamma_1^{-j}.$$

2) Sei R eine endliche Untermenge von $I=\bigvee_{\nu=1}^{\infty} I_n(F)$, also etwa $R=\{\mathfrak{i}_{j_1}^{m_1},\ldots,\mathfrak{i}_{j_w}^{m_w}\}$. Dann existiert $\Phi(R)$, und es ist

$$\Phi(R) = \sum_{\nu=1}^{w} \Phi(\mathfrak{i}_{j_\nu}^{m_\nu}),$$

wie sich auf Grund von 1) ergibt.

3) R bestehe aus einem beliebigen Intervall. Dann wählen wir j so groß, daß $g^{-j}<|R'|$ wird. Für $n\geqq j$ ist wegen 2) und 1), da es höchstens zwei Intervalle von $I_j(F)$ gibt, die mit R' einen nichtleeren Durchschnitt haben, ohne ganz in R' enthalten zu sein, nach Hilfssatz 12

$$0 \leqq \sum_{\mathfrak{i}_n\in I_n\wedge R'} \Phi(\mathfrak{i}_n) - \sum_{\mathfrak{i}_j\in I_j\wedge R'} \Phi(\mathfrak{i}_j) \leqq 2\,\Phi(\mathfrak{i}_j) \leqq 2\tau(F)\,\gamma_1^{-j},$$

und somit existiert der Grenzwert $\Phi(R)$, da $\lim_{j\to\infty} 2\tau(F)\,\gamma_1^{-j}=0$ ist.

4. Sei R irgendeine halboffene Intervallmenge, etwa $R=\{\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_t\}$, wobei diese $\mathfrak{r}_\nu$ halboffene, sich nicht überschneidende Intervalle sind. Dann

[22]) Der Fall $\gamma_1<1$ kann nicht eintreten, da nach (40) stets $\gamma(F)\geqq g-1$ ist.

[23]) Die folgenden Betrachtungen bilden eine Verbesserung von [12], Nr. 4.

kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß zwischen je zweien dieser Intervalle jeweils ein nicht in R enthaltenes Intervall liegt, und man kann somit die Überlegung 3) auf jedes $\mathfrak{r}_\nu$ gesondert anwenden. Daraus folgt, daß $\Phi(R)$ existiert und $\Phi(R) = \sum_{\nu=1}^{t} \Phi(\mathfrak{r}_\nu)$ ist.

Damit ist die Funktion $\Phi(R)$ für alle R definiert, und eine einfache Betrachtung zeigt, daß sie auch additiv ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Voraussetzungen a) und b) von Hilfssatz 13 mit $c_7 = \tau \frac{g}{\gamma_1}$, $c_8 = \tau$ erfüllt sind.

Zu a). Sei für die halboffene Intervallmenge R die Zahl j so bestimmt, daß

$$g^{-(j+1)} \leqq |R'| < g^{-j} \tag{53}$$

ist. Da R' von einem Intervall i der Länge $|R'|$ überdeckt wird, ist, wenn etwa $i_{j+1}^{m_1}, \ldots, i_{j+1}^{m_l}$ die in i enthaltenen Intervalle von I_{j+1} sind, nach 1)

$$\Phi(R) = \sum_{\nu=1}^{l} \Phi(i_{j+1}^{m_\nu}) \leqq l\, \tau(F)\, \gamma_1^{-(j+1)}.$$

Somit wird, da trivialerweise $l \leqq \frac{|R'|}{g^{-(j+1)}}$ ist, wegen $\gamma(F) = g^\alpha$

$$\Phi(R) \leqq \tau\, g^{1-\alpha} |R'|^\alpha = \tau \frac{g}{\gamma_1} |R'|^\alpha,$$

woraus wegen (53)

$$\Phi(R) \leqq \tau\, g^{1-\alpha} |R'|^\alpha = \tau \frac{g}{\gamma_1} |R'|^\alpha$$

folgt.

Zu b). Sei R die Menge der halboffenen Intervalle $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_t$, und sei $R' \supseteq K(F; g)^*$. Dann gibt es bei genügend großem n höchstens $2t$ Intervalle von I_n, die nicht vollständig in R' enthalten sind. Daher wird nach Hilfssatz 11

$$\Phi(R) = \lim_{n \to \infty} \frac{h(n) - 2t}{g^{n\alpha}} = \tau(F) > 0.$$

Folglich ergibt sich nach Hilfssatz 13

$$\{K(F; g)\}^\alpha = \{K(F; g)^*\}^\alpha \geq \frac{c_8}{c_7} = \frac{\gamma_1}{g},$$

womit (52) bewiesen ist.

§ 6. Analoge Sätze für Mengen natürlicher Zahlen

15. Die Untersuchungen der beiden vorangehenden Paragraphen lassen sich in naheliegender Weise auf Mengen $\mathfrak{M}$ natürlicher Zahlen übertragen, wobei sich statt der Aussagen über die Dimension von Punktmengen solche über das asymptotische Verhalten der Anzahlfunktionen $M(x)$ dieser Mengen $\mathfrak{M}$, d.h. der Anzahl der Elemente $m \in \mathfrak{M}$ mit $m \leqq x$, ergeben. Es gilt der

Satz 10. Sei Ξ ein E-Fächer, dessen Funktion $h(n)$ der Ungleichung (7) genügt, und sei $M = \bigwedge_{n=1}^{\infty} I_n'$ eine ihm g-adisch zugeordnete Punktmenge. Wird dann jeder der Sequenzen $E_n^r = e_1 \ldots e_n$ die ganze Zahl $e_{nr} = \sum_{j=1}^{n} e_j\, g^{n-j}$

zugeordnet und die Menge aller dieser $e_{n\tau}$ mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so ist

$$M(x) = x^{\dim M + o(1)}.$$

Beweis. Für jede Sequenz E_n^τ, die zu einem Intervall $i_n^\tau \in I_n$ gehört, ist offenbar $0 \leqq e_{n\tau} < g^n$. Da auch umgekehrt jeder Zahl $m \in \mathfrak{M}$ mit $0 \leqq m < g^n$, wenn sie gegebenenfalls durch Voranstellen von Nullen auf n Ziffern verlängert wird, eine Sequenz E mit $|E| = n$ entspricht, die zu einem Intervall $i_n^\tau \in I_n$ gehört, ist

$$h(n) = M(g^n - 1) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Folglich gilt für jede ganze Zahl x mit $g^n \leqq x < g^{n+1}$, also mit $n = \left[\frac{\log x}{\log g}\right]$, die Beziehung

$$h(n) \leqq M(x-1) < h(n+1). \tag{54}$$

Daraus ergibt sich nach Satz 2, da ja in der dortigen Bezeichnungsweise

$$h(n) = e^{n(\chi + o(1))} = g^{n(\dim M + o(1))}$$

ist, wie behauptet,

$$M(x) = g^{\frac{\log x}{\log g}(\dim M + o(1))} = x^{\dim M + o(1)}.$$

Ist $\mathfrak{F} = \{F_1, \ldots, F_m\}$ eine Menge g-adischer Sequenzen im Sinne von Nr. 7, so gilt für die Menge $\mathfrak{N}(\mathfrak{F}; g)$ der nichtnegativen ganzen Zahlen mit $\mathfrak{F}$-freier g-adischer Entwicklung der

Satz 11. Die Anzahlfunktion $K(\mathfrak{F}; g; x) = K(x)$ genügt der asymptotischen Gleichung

$$K(x) = x^{\frac{\log \gamma(\mathfrak{F})}{\log g} + o(1)}.$$

Beweis. Sind die ersten Ziffern $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_1^m$ sämtlich von Null verschieden, so entsteht aus jeder Zahl $k \in \mathfrak{N}(\mathfrak{F}; g)$ mit $k < g^n$, wenn man ihre g-adische Entwicklung durch Voranstellen von Nullen auf n Ziffern verlängert, eine $\mathfrak{F}$-freie Sequenz der Länge n, und daher ist

$$K(g^n - 1) = h(n) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{55}$$

Gibt es dagegen eine Sequenz F_μ mit $f_1^\mu = 0$, ist also

$$\max_{\mu = 1, \ldots, m} t(\underbrace{00 \ldots 0}_{i-1}, F_\mu) = \lambda > 0,$$

so geht die $\mathfrak{F}$-Freiheit von k durch diesen Prozeß verloren, falls die ersten $i - \lambda$ Ziffern von k eine der Sequenzen $f_\mu^{\lambda+1} f_\mu^{\lambda+2} \ldots f_\mu^i$ bilden, bei denen $f_\mu^1 \ldots f_\mu^\lambda = 0 \ldots 0$ ist. Bezeichnet man dann mit $A(s)$ die Anzahl der $\mathfrak{F}$-freien nichtnegativen Zahlen $k < g^n$ mit s Ziffern, die nach Voranstellen von $n - s$ Nullen nicht mehr $\mathfrak{F}$-frei sind, so wird wegen $\lambda \leqq i - 1$

$$A(s) \leqq m\, h(s - i + \lambda) \leqq m\, h(s-1)$$

und ferner

$$K(g^n - 1) - h(n) \leqq \sum_{s=1}^{n-1} A(s) \leqq m \sum_{s=0}^{n-1} h(s) \leqq m n\, h(n).$$

So erhält man statt (55)

$$h(n) \leq K(g^n - 1) \leq (m+1)\, n\, h(n), \tag{56}$$

und daraus folgt die Behauptung, da nach Satz 3 sowohl

$$h(n) = g^{n\,(\dim K(\mathfrak{F};g) + o(1))} \quad \text{als auch} \quad (m+1)\, n\, h(n) = g^{n\,(\dim K(\mathfrak{F};g) + o(1))}$$

ist.

Folgerung. Sei F eine Sequenz mit[24]) $f_1 \neq 0$ und $\mathfrak{N}(F;g)$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen mit F-freier g-adischer Entwicklung. Dann gilt nach (54) für ihre Anzahlfunktion $K(x)$, wenn wieder $g^n \leq x < g^{n+1}$ angenommen wird,

$$\frac{h(n)}{(g^{n+1}-1)^\alpha} \leq \frac{K(x-1)}{(x-1)^\alpha} \leq \frac{h(n+1)}{(g^n-1)^\alpha},$$

und wegen $h(n) \simeq \tau g^{n\alpha} = \gamma^n$ (Hilfssatz 11) folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(n)}{(g^{n+1}-1)^\alpha} = \frac{\tau}{g^\alpha} = \frac{\tau}{\gamma} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{h(n+1)}{(g^n-1)^\alpha} = \tau\gamma,$$

so daß sich

$$\frac{\tau}{\gamma} \leq \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{K(x)}{x^\alpha} \leq \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{K(x)}{x^\alpha} \leq \tau\gamma \tag{57}$$

ergibt.

Literatur

[1] Best, E.: On sets of fractional dimension. III. Proc. London Math. Soc. 2, **47**, 436—454 (1942). — [2] MacDuffee, C. C.: The Theory of Matrices. Erg. Math., 2, 2. Aufl. New York 1946. — [3] Eggleston, H. G.: Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. 2, **54**, 42—93 (1951). — [4] Frobenius, G.: Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **26**, 471—476 (1908). — [5] Good, I. J.: The fractional dimensional theory of continued fractions. Proc. Cambridge Phil. Soc. **37**, 199—228 (1941). — [6] Hardy, G., u. J. Littlewood: The fractional part of $n^k\Theta$. Acta Math. **37**, 155—191 (1914). — [7] Kaluza, Th.: Struktur- und Mächtigkeitsuntersuchungen an gewissen unendlichen Graphen mit einigen Anwendungen auf lineare Punktmengen. Math. Ann. **122**, 235—258 (1950). — [8] Moran, P. A. P.: Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Proc. Cambridge Phil. Soc. **42**, 15—23 (1946). — [9] Nörlund, N. E.: Vorlesungen über Differenzenrechnung. Berlin 1924. — [10] Volkmann, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math. **190**, 199—230 (1952). — [11] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. Math. Z. **58**, 284—287 (1953). — [12] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. III. Math. Z. **59**, 259—270 (1953).

[24]) Dieser Zusatz ist auch bei [12], Nr. 6 zu machen.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität und University of Utah, Department of Mathematics

(Eingegangen am 13. Februar 1956)

Morita, K., and H. Tachikawa
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 414—428 (1956)

Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings

By
Kiiti Morita and Hiroyuki Tachikawa

Introduction. Let A be an associative ring with a unit element 1. By a left or right A-module we shall always mean one on which the unit element of A acts as the identity operator. In the present paper we shall investigate some properties of character modules, submodules and residue class modules of finite free A-modules, and give some characterizations of quasi-Frobenius rings.

Let U be a double A-module; that is, U is a left and right A-module, and $a(ub) = (au)b$ for $a, b \in A$ and $u \in U$. For a left A-module L, an A-left homomorphism of L into U will be called a U-character of L. The set of all U-characters of L forms a right A-module under a suitable definition. We shall call this module the U-character module[1]) of L. We may define the U-character module of a right A-module similarly.

Let the U-character modules of any simple left A-module and any simple right A-module be simple. Then our first theorem asserts that if a left A-module L and a right A-module R form an orthogonal pair with respect to U (for the definition, cf. § 1) and one of these modules has a composition series, then each of these modules is isomorphic to the U-character module of the other and the well known relation between the annihilators is valid. As an immediate consequence we have a theorem of M. Hall and the duality of character modules for quasi-Frobenius rings.

Now let A be a ring satisfying the minimum condition and possessing a unit element. In § 3 we shall prove the following theorem: If L and L' are two left A-submodules of a finite free left A-module $A^{(n)}$ with n generators such that $A^{(n)}/L$ is A-isomorphic to $A^{(n)}/L'$, then L and L' are A-isomorphic to each other. Special cases of this theorem have been obtained by Gaschütz and Kawada[2]).

The converse of this theorem does not hold in general, but we can establish the following theorem in § 4: In order that an A-isomorphism $L \cong L'$ for any two A-submodules of $A^{(n)}$ imply an A-isomorphism $A^{(n)}/L \cong A^{(n)}/L'$, $n = 1, 2, \ldots$, it is necessary and sufficient that A be a quasi-Frobenius ring.

[1]) Azumaya [8] called it the conjugate module of L in case $U = A$. To emphasize the analogy to character groups of topological groups we adopt here this denomination (cf. [10] and § 1 below).

[2]) Gaschütz [2] has proved this theorem for the case where A is a group ring over a prime field with characteristic $p \neq 0$, and Kawada [4] has proved it for the case $n = 1$.

Indeed, in case A is quasi-Frobenius, it is shown that every A-isomorphism $L \cong L'$ can be extended to an A-isomorphism of $A^{(n)}$ onto itself.

The notions of (M_0)-modules and (M_u)-modules have been recently introduced by GASCHÜTZ [1] for the case of group rings, and NAGAO-NAKAYAMA [6] have determined the structure of these modules for the case of algebras. In § 5 we shall determine the structure of (M_u)-modules for quasi-Frobenius rings and furthermore show that a ring A is an (M_u)-module if and only if A is quasi-Frobenius[3]).

In case A is an algebra over a field K each of the theorems in § 3 and § 4 admits a representation-theoretical interpretation. We can give further a representation-theoretical characterization for quasi-Frobenius algebras: We shall prove in § 6 that every representation of A in K is embedded in a direct sum of a suitable finite number of left regular representations (i.e. every left representation module is A-isomorphic to a submodule of a suitable finite free left A-module), if and only if A is quasi-Frobenius.

§ 1. Character modules

Let A be a ring and U a double A-module. If L is a left A-module, the set of all U-characters of L forms a right A-module under the following definitions of addition and multiplication:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad \text{for} \quad x \in L,$$
$$(\varphi a)(x) = \varphi(x)\, a, \quad \text{for} \quad x \in L,\ a \in A.$$

This A-module is the U-character module of L and will be denoted by $\mathrm{Char}_U L$. The U-character module of a right A-module is similarly defined; it is a left A-module.

Let L and R be a left and a right A-module respectively. If, for any element x of L and any element y of R there corresponds an element u of U, denoted by (x, y), such that

$$(x + x', y) = (x, y) + (x', y)$$
$$(x, y + y') = (x, y) + (x, y')$$
$$(a x, y) = a(x, y), (x, y a) = (x, y) a,$$

for any $x, x' \in L$; $y, y' \in R$; $a \in A$, then we shall say that L and R form a pair with respect to U. In this case we put

$$\mathrm{Ann}(L_0; R) = \{y \mid (x, y) = 0, \quad \text{for all } x \in L_0\},$$
$$\mathrm{Ann}(R_0; L) = \{x \mid (x, y) = 0, \quad \text{for all } y \in R_0\},$$

for $L_0 \subseteq L$ and $R_0 \subseteq R$. If

$$\mathrm{Ann}(L; R) = 0, \qquad \mathrm{Ann}(R; L) = 0,$$

[3]) This is a generalization of the result of NAGAO-NAKAYAMA obtained for the case of algebras.

we shall say that L and R form an orthogonal pair with respect to U. We shall prove the following theorem.

THEOREM 1.1. *Let the U-character modules of any simple left A-module and of any simple right A-module be simple. Suppose that a left A-module L and a right A-module R form an orthogonal pair with respect to U and one of L and R has a composition series. Then we have the following conclusions:*

(a) $\mathrm{Char}_U L \cong R, \quad \mathrm{Char}_U R \cong L.$

(b) $\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_0; R); L\right) = L_0,$
$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(R_0; L); R\right) = R_0,$

for any submodule L_0 of L and any submodule R_0 of R.

COROLLARY 1.2. *Under the assumption of Theorem 1.1 L/L_0 and $\mathrm{Ann}(L_0; R)$, as well as $\mathrm{Ann}(R_0; L)$ and R/R_0, form an orthogonal pair with respect to U, and each of these modules is isomorphic to the U-character module of the other in the respective pair.*

PROOF. First we assume that L has a composition series, say

$$0 = L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_r = L,$$

as a left A-module. Then we have

$$\mathrm{Ann}(L_i; R) \supseteqq \mathrm{Ann}(L_{i+1}; R), \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, r-1,$$
$$\mathrm{Ann}(L_1; R) = R, \quad \mathrm{Ann}(L_r; R) = 0.$$

If, for any element $\bar{x}$ of L_{i+1}/L_i and any element $\bar{y}$ of $\mathrm{Ann}(L_i)/\mathrm{Ann}(L_{i+1})$, we put

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y), \quad (x \in L_{i+1}, \ y \in \mathrm{Ann}(L_i),$$

this pairing does not depend on the choice of representatives x and y. Moreover, if $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ for all $\bar{x} \in L_{i+1}/L_i$, then we have $\bar{y} = 0$ as an element of $\mathrm{Ann}(L_i)/\mathrm{Ann}(L_{i-1})$. Therefore $\mathrm{Ann}(L_i)/\mathrm{Ann}(L_{i+1})$ is isomorphic to a submodule of $\mathrm{Char}_U(L_{i+1}/L_i)$, and consequently, since $\mathrm{Char}_U(L_{i+1}/L_i)$ is simple, $\mathrm{Ann}(L_i)/\mathrm{Ann}(L_{i+1})$ is zero or simple. Thus if we denote the length of a composition series of a left (or right) A-module M by $[M]_l$ (or $[M]_r$), we have

(1) $$[R]_r \leq [L]_l.$$

The above argument shows at the same time that

(2) $$[\mathrm{Char}_U L]_r \leq [L]_l,$$

since, if we put $(x, \varphi) = \varphi(x)$ for $x \in L$, $\varphi \in \mathrm{Char}_U L$, L and $\mathrm{Char}_U L$ form a pair and $\mathrm{Ann}(L; \mathrm{Char}_U L) = 0$, $\mathrm{Ann}(0; \mathrm{Char}_U L) = \mathrm{Char}_U L$.

By symmetry of L and R we have further

(3) $$[L]_l \leq [R]_r.$$

On the other hand, since $\mathrm{Ann}(L; R) = 0$, R is isomorphic to a submodule of $\mathrm{Char}_U L$, and hence

(4) $$[R]_r \leq [\mathrm{Char}_U L]_r.$$

Therefore we have by (2) to (4),

$$[L]_l \leq [R]_r \leq [\mathrm{Char}_U L]_r \leq [L]_l.$$

This shows that R is isomorphic to $\mathrm{Char}_U L$, and (a) is proved hereby.

At the same time we see that $\mathrm{Ann}(L_i)/\mathrm{Ann}(L_{i+1})$ is simple, and

$$\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_{i+1})\right)/\mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_i)\right)$$

is also simple. Therefore

$$0 = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_1)\right) \subset \cdots \subset \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_r)\right) = L$$

is a composition series of L and $L_i \supset \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_i)\right)$. Thus we have

$$L_i = \mathrm{Ann}\left(\mathrm{Ann}(L_i)\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Since any submodule L_0 of L is a member of some composition series of L we have (b) for any L_0.

Proof of Corollary 1.2. For $x \in L$, $\bar{x} \in L/L_0$, $y \in \mathrm{Ann}(L_0)$ we put $(\bar{x}, y) = (x, y)$. Then this defines an orthogonal pairing of L/L_0 and $\mathrm{Ann}(L_0; R)$ to U by (b) of Theorem 1.1.

Corollary 1.3. *Under the assumption of Theorem* 1.1, *any U-character of a left A-submodule L_0 of L can be extended to a U-character of L.*

Proof. Since $\mathrm{Char}_U L_0 = R/\mathrm{Ann}(L_0; R)$, any U-character of L_0 is represented as the residue class of some U-character of L. This proves our corollary.

Lemma 1.4. *Let A be a ring with a unit. Suppose that U satisfies the maximal condition for left and right submodules. Then the following two conditions are equivalent:*

(a) *The U-character module of every simple left A-module as well as that of every simple right A-module is simple.*

(b) *The duality relations*

$$L \cong \mathrm{Char}_U(\mathrm{Char}_U L), \qquad R \cong \mathrm{Char}_U(\mathrm{Char}_U R) \tag{5}$$

hold for every simple left A-module L and for every simple right A-module R.

Proof. Let L be a simple left A-module. For $x \in L$, $\varphi \in \mathrm{Char}_U L$ we shall put

$$(x, \varphi) = \varphi(x),$$

and

$$L_0 = \mathrm{Ann}(\mathrm{Char}_U L; L).$$

Suppose that $L_0 = L$. Then we have $(x, \varphi) = 0$ for every $x \in L$, $\varphi \in \mathrm{Char}_U L$ and hence $\mathrm{Char}_U L = 0$.

(a) $\rightarrow$ (b). In case (a) holds, $\mathrm{Char}_U L$ is simple and L_0 must be zero. Therefore L and $\mathrm{Char}_U L$ form an orthogonal pair and (b) follows at once from Theorem 1.1.

(b) $\rightarrow$ (a). If (b) holds, $\mathrm{Char}_U L \neq 0$, since otherwise we would have $L = 0$ by (b). Hence L and $\mathrm{Char}_U L = R$ form an orthogonal pair.

If R/R_1 is simple for some submodule R_1, then if we put $L_1 = \mathrm{Ann}(R_1; L)$, we have either $L_1 = L$ or $L_1 = 0$.

If $L_1 = 0$, then we have $\mathrm{Char}_U(R/R_1) = 0$, since $L_1 \cong \mathrm{Char}_U(R/R_1)$. This shows that $R/R_1 = 0$ by the duality relation in (b). Therefore $L_1 = L$. Hence we have $(x, \varphi) = 0$ for $x \in L$, $\varphi \in R_1$ and consequently $R_1 = 0$. Thus R is simple.

REMARK. From the condition (a) only, we cannot conclude in general the validity of (5) for every left A-module possessing a composition series; If A is a ring satisfying the minimum condition and its radical N is not zero, we have $\mathrm{Char}_U A \cong A/N$, $\mathrm{Char}_U(A/N) \cong A/N$, for $U = A/N$, and (a) holds for this A and U.

§2. Quasi-Frobenius rings

In case A is a principal ideal domain $\mathfrak{o}$ (commutative or non-commutative), if we take the residue class module $K/\mathfrak{o}$ as U where K is a quotient field of $\mathfrak{o}$, then the first condition of Theorem 1.1 is satisfied and Theorem 1.1 may be applied; $\mathrm{Char}_{K/\mathfrak{o}}(\mathfrak{o}/\mathfrak{o}a) \cong \mathfrak{o}/a\mathfrak{o}$.

For a commutative ring A we can prove more generally that if A is an integral domain $\mathfrak{o}$ such that (i) $\mathfrak{o}$ is integrally closed in its quotient field K, (ii) every prime ideal of $\mathfrak{o}$ is maximal and (iii) A satisfies the maximum condition for ideals, then the condition of Theorem 1.1 is satisfied for $U = K/\mathfrak{o}$. Indeed, if $\mathfrak{p}$ is a maximal ideal of $\mathfrak{o}$, then $\mathrm{Char}_U(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}) \cong \mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}$ and $\mathfrak{p}^{-1}/\mathfrak{o}$ is simple, since $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{o}$.

Here our concern lies in the case where A is a ring satisfying the minimum condition. Hereafter we shall always deal with such a ring. In this case we put $U = A$ throughout. First we shall prove

THEOREM 2.1. *Let A be a ring satisfying the minimum condition for left and right ideals and possessing a unit element. Then the following statements are equivalent:*

(a) *The A-character module of every simple left A-module as well as that of every simple right A-module is simple.*

(b) *For every simple left A-module L and for every simple right A-module R, we have*

$$L \cong \mathrm{Char}_A(\mathrm{Char}_A L), \qquad R \cong \mathrm{Char}_A(\mathrm{Char}_A R).$$

(c) *A is quasi-Frobenius.*

PROOF. (a) $\rightleftharpoons$ (b) is proved by Lemma 1.4.

(c) $\rightarrow$ (a). As is shown in NAKAYAMA ([7], p. 9) we have $r(N) = l(N)$ where N is the radical of A, $r(S) = \{x \mid ax = 0 \text{ for every } a \in S\}$, $l(S) = \{x \mid xa = 0 \text{ for every } a \in S\}$ for $S \subset A$. If e is a primitive idempotent of A, then the A-character module of Ae/Ne is isomorphic to $er(N) = el(N)$, and $el(N)$ is simple by the definition of quasi-Frobenius rings.

(a) $\rightarrow$ (c). As above, the A-character module of Ae/Ne is isomorphic to $er(N)$. By (a), $er(N)$ is a simple right A-module and hence $er(N) \subset l(N)$. Therefore we have $r(N) = l(N)$. These facts, together with (b), imply (c).

Now let A be a quasi-Frobenius ring. If we denote by $A^{(n)}$ and $B^{(n)}$ a free left A-module and a free right A-module with n generators:

$$A^{(n)} = Au_1 \oplus Au_2 \oplus \cdots \oplus Au_n, \qquad B^{(n)} = v_1 A \oplus v_2 A \oplus \cdots \oplus v_n A,$$

then $A^{(n)}$ and $B^{(n)}$ form an orthogonal pair with respect to A; this is seen by putting

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i,\ \sum_{i=1}^{n} v_i b_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in A.$$

Let L be any finitely generated left A-module. Then it is well known that $L \cong A^{(n)}/L_0$ with a suitable submodule L_0 of $A^{(n)}$ for some n. Therefore by Corollary 1.2 and Theorem 1.1 we obtain immediately the following theorem.

THEOREM 2.2. *Let A be a quasi-Frobenius ring and let L be a finitely generated left A-module. If we put*

$$(x, \varphi) = \varphi(x) \quad \text{for} \quad x \in L,\ \varphi \in \mathrm{Char}_A L,$$

this pairing is orthogonal with respect to A, and $L \cong \mathrm{Char}_A(\mathrm{Char}_A L)$ and the annihilator relations

$$\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(L_0;\ \mathrm{Char}_A L);\ L\big) = L_0$$
$$\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(R_0;\ L);\ \mathrm{Char}_A L\big) = R_0$$

hold for every submodule L_0 of L and every submodule R_0 of $\mathrm{Char}_A L$.

Thus we have an analogy to PONTRJAGIN's theory of character groups of locally compact commutative groups [*10*].

COROLLARY 2.3. *A is quasi-Frobenius if and only if the annihilator relations*

$$l\big(r(L)\big) = L, \qquad r\big(l(R)\big) = R, \tag{6}$$

hold for every left ideal L and every right ideal R of A.

PROOF. The "only if" part is a special case of Theorem 2.2.

To prove the "if" part, let e be a primitive idempotent. Then we have $\mathrm{Char}_A(Ae/Ne) \cong er(N)$, $er(N) = r\big(A(1-e)+Ne\big)$ and $r\big(A(1-e)+Ne\big)$ is simple by (6) since $A(1-e)+Ne$ is a maximal left ideal. Thus the "if" part follows from Theorem 2.1.

REMARK. If we take a finite free A-module $A^{(n)}$ as L, we have a theorem of M. HALL. In [*8*] AZUMAYA has derived Theorem 2.2 from HALL's theorem. Our method yields a simultaneous deduction of Theorem 2.2, Hall's Theorem and NAKAYAMA's characterization of quasi-Frobenius rings (cf. Corollary 2.3 above); indeed, our proof of Theorem 1.1 is an elaboration of NAKAYAMA'S argument in the proof of [*7*], Theorem 6.

Concerning Frobenius rings we have

THEOREM 2.4. *In order that a ring A with a unit be a Frobenius ring it is necessary and sufficient that*

$$\mathrm{Char}_A(A/N) \cong A/N$$

hold for the left A-module A/N and the right A-module A/N, where N is the radical of A.

THEOREM 2.5. *Let A be a quasi-Frobenius ring. Then A is a Frobenius ring if and only if*

$$\mathrm{Char}_A(Z)_l \cong (Z)_r, \qquad \mathrm{Char}_A(Z)_r \cong (Z)_l$$

for every simple two-sided ideal Z, and A is uniserial if and only if the above relations hold for every two-sided ideal Z. Here by $(Z)_l$ and $(Z)_r$ we denote the left ideal Z and the right ideal Z respectively.

We omit the proof.

§3. Submodules of a free module

Let A be a ring satisfying the minimum condition and possessing a unit element.

Let $A^{(n)}$ be a free left A-module: $A^{(n)} = A u_1 \oplus A u_2 \oplus \cdots \oplus A u_n$.

Our purpose in this section is to prove

THEOREM 3.1. *Let L and L' be two A-submodules of $A^{(n)}$ and let ϑ be an isomorphism of $A^{(n)}/L$ onto $A^{(n)}/L'$. Then there exists an isomorphism φ of $A^{(n)}$ onto itself which induces the given isomorphism ϑ and, in particular, L and L' are isomorphic to each other.*

The same holds for right modules.

We shall begin with

LEMMA 3.2. *Let A be a semisimple ring and L a left A-submodule of $A^{(n)}$. Then for a given direct sum decomposition of $A^{(n)}/L$:*

$$A^{(n)}/L = A\bar{v}_1 \oplus A\bar{v}_2 \oplus \cdots \oplus A\bar{v}_n$$

with elements $v_i \in A^{(n)}$, where the bar indicates the residue class, there exist elements w_i of $A^{(n)}$ such that

$$A^{(n)} = A w_1 \oplus A w_2 \oplus \cdots \oplus A w_n,$$

$$w_i \equiv v_i \pmod{L}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

PROOF. Let us denote by $A(1-e_i)$ the set of annihilators of $\bar{v}_i$:

$$A(1-e_i) = \{x \mid x\bar{v}_i = 0,\ x \in A\},$$

where e_i is an idempotent of A; the existence of such an e_i is assured by the semisimplicity of A. Then, if we put

$$v_i' = e_i v_i,$$

we have $v_i' \equiv v_i \pmod{L}$, $v_i' = e_i v_i'$. We now prove that the sum: $Av_1' + Av_2' + \cdots + Av_n' + L$ is direct. If $\sum_i a_i v_i' + x_0 = 0$ for some $a_i \in A$, $x_0 \in L$, then $\sum a_i \bar{v}_i = 0$, and hence $a_i \bar{v}_i' = a_i e_i \bar{v}_i = 0$, and consequently $a_i e_i \in A(1-e_i)$; this shows that $a_i e_i = 0$, and hence $a_i v_i' = 0$. Therefore we have a direct sum decomposition of $A^{(n)}$: $A^{(n)} = Av_1' \oplus Av_2' \oplus \cdots \oplus Av_n' \oplus L$, $v_i' \equiv v_i \pmod{L}$.

Since $Av_i' \cong Ae_i$ and A is semisimple, L is decomposed into a direct sum of L_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ such that

$$L_i = Az_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\{x \mid xz_i = 0,\ x \in A\} = Ae_i, \quad (1 - e_i)z_i = z_i.$$

If we put $w_i = v_i' + z_i$, then we have $Aw_i = Av_i \oplus Az_i \cong A$, since $v_i' = e_i w_i$ and $z_i = (1 - e_i)w_i$.

On the other hand, $w_i \equiv v_i'$ (mod L) and hence $w_i \equiv v_i$ (mod L). Since $Aw_i \cong A$, we have

$$A^{(n)} = Aw_1 \oplus Aw_2 \oplus \cdots \oplus Aw_n.$$

Proof of Theorem 3.1. I. Let us first consider the case where A is semisimple. Then there exist n elements v_i of $A^{(n)}$ by Lemma 3.2 such that

$$A^{(n)} = Av_1 \oplus Av_2 \oplus \cdots \oplus Av_n, \qquad A^{(n)}/L = A\bar{v}_1 \oplus A\bar{v}_2 \oplus \cdots \oplus A\bar{v}_n.$$

If we put $\vartheta(\bar{v}_i) = \bar{w}_i$, we have

$$A^{(n)}/L' = A\bar{w}_1 \oplus A\bar{w}_2 \oplus \cdots \oplus A\bar{w}_n.$$

By Lemma 3.2 again we can find n elements w_i' of $A^{(n)}$ such that

$$A^{(n)} = Aw_1' \oplus Aw_2' \oplus \cdots \oplus Aw_n', \qquad w_i \equiv w_i' \,(\mathrm{mod}\, L).$$

If we define a homomorphism φ by

$$\varphi(\sum a_i v_i) = \sum a_i w_i',$$

then φ is an isomorphism of $A^{(n)}$ onto itself and induces ϑ.

II. Next let N be the radical of A and $N^{(n)}$ the submodule of $A^{(n)}$ consisting of all the elements of the form $\sum a_i w_i$ with $a_i \in N$, $w_i \in A^{(n)}$. We shall first remark that ϑ maps $(N^{(n)} + L)/L$ onto $(N^{(n)} + L')/L'$ isomorphically. Therefore ϑ induces the isomorphism

$$\vartheta^*: \quad A^{(n)}/(N^{(n)} + L) \cong A^{(n)}/(N^{(n)} + L'). \tag{5}$$

On the other hand $A^{(n)}/(N^{(n)} + L) \cong A^{(n)}/N^{(n)}/(N^{(n)} + L)/N^{(n)}$ and $A^{(n)}/N^{(n)}$ is isomorphic to a direct sum of $A\bar{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, each of which is isomorphic to the left A-module A/N, where $\bar{u}_i$ means the residue class of u_i modulo $N^{(n)}$. Hence by the first part of the proof we can find an isomorphism φ_0 of $A^{(n)}/N^{(n)}$ onto itself such that φ_0 induces the isomorphism ϑ^* in (5).

If we put $\varphi_0(\bar{u}_i) = \bar{v}_i$, then we have

$$A^{(n)} = Av_1 \oplus Av_2 \oplus \cdots \oplus Av_n, \quad v_i \in \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

To prove this, we first observe that there exist $a_{ij} \in A$, $r_{ij} \in N$ such that $u_i = \sum_j a_{ij} v_j + \sum_j r_{ij} u_j$, since $A^{(n)}/N^{(n)} = A\bar{v}_1 \oplus A\bar{v}_2 \oplus \cdots \oplus A\bar{v}_n$, $N^{(n)} = Nu_1 \oplus Nu_2 \oplus \cdots \oplus Nu_n$.

Therefore we have

$$(E-(r_{ij}))\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (a_{ij})\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

where E means the unit matrix of degree n. Since the radical N is nilpotent, there exists a positive integer k such that $N^k=0$. Then, since $r_{ij}\in N$, we have $(r_{ij})^k=0$ and hence $(E+(r_{ij})+(r_{ij})^2+\cdots+(r_{ij})^{k-1})(E-(r_{ij}))=E$. Therefore we have the expression

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (a'_{ij})\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad a'_{ij}\in A.$$

Thus we have $A^{(n)}=Av_1+Av_2+\cdots+Av_n$. By the consideration of the length of composition series this is the direct-sum decomposition. Thus if we put

$$\varphi_1(u_i)=v_i, \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

then φ_1 defines an isomorphism of $A^{(n)}$ onto itself such that φ_1 induces the isomorphism ϑ^* [cf. (5)].

If we denote by $\tilde{w}$ the residue class of $w\in A^{(n)}$ modulo L or L', then the residue class of $\vartheta(\tilde{u}_i)$ modulo $(L'+N^{(n)})/L'$ coincides with the residue class of $\tilde{v}_i$ modulo $(L'+N^{(n)})/L'$. Therefore we can find elements r_i of $N^{(n)}$ such that $\vartheta(\tilde{u}_i)=\tilde{v}_i+\tilde{r}_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Hence if we put

$$\varphi(u_i)=w_i, \quad w_i=v_i+r_i, \qquad i=1,2,\ldots,n,$$

then we have the direct-sum decomposition:

$$A^{(n)}=Aw_1\oplus Aw_2\oplus\cdots\oplus Aw_n,$$

since $v_i\equiv w_i \bmod N^{(n)}$ [cf. the above proof of (6)]. Hence φ defines an isomorphism of $A^{(n)}$ onto itself which induces the given isomorphism ϑ. This completes our proof.

REMARK. Theorem 3.1 cannot be brought into a sharper form such that $M/L\cong M/L'$ implies $L\cong L'$ for submodules L, L' of an A-module M where M may not be free. It can be shown that this proposition holds for any M if and only if A is semisimple; indeed if $N\neq 0$, there exists some primitive idempotent e with $Ne\neq 0$, and hence if we construct $M=M_1\oplus M_2$, $M_1\cong Ae/Ne$, $M_2\cong Ae$, and put $L=M_1+NM_2$, $L'=M_2$, then $M/L\cong M/L'$, but $L\not\cong L'$.

§ 4. A characterization of quasi-Frobenius rings

We shall first prove the following theorem[4]).

THEOREM 4.1. *Let A be a quasi-Frobenius ring. Then for an A-submodule L of a finite free left A-module $A^{(n)}$ any homomorphism ϑ of L into $A^{(n)}$ can be extended to a homomorphism Θ of $A^{(n)}$ into itself.*

[4]) IKEDA [3] has proved this theorem for $n=1$.

PROOF. Let $A^{(n)} = Au_1 \oplus Au_2 \oplus \cdots \oplus Au_n$ and let $\vartheta(x) = \sum_i \vartheta_i(x)\, u_i$. Then each ϑ_i: $L \to A$ is a left A-character of L. Therefore, in view of Theorem 2.1, it follows from Corollary 1.3 that ϑ_i can be extended to an A-character Θ_i of $A^{(n)}$. Then $\Theta(x) = \sum_i \Theta_i(x)\, u_i$ clearly defines a homomorphism of $A^{(n)}$ into itself such that $\Theta(x) = \vartheta(x)$ for $x \in L$.

Now we shall establish the following theorem[4]).

THEOREM 4.2. *Let A be a quasi-Frobenius ring. Then for an A-submodule L_1 of a finite free left A-module $A^{(n)}$, any isomorphism ϑ of L_1 onto an A-submodule L_2 of $A^{(n)}$ can always be extended to an isomorphism Θ of $A^{(n)}$ onto itself.*

PROOF. Let $A^{(n)}$ and $B^{(n)}$ be a free left and a free right A-module with generators $\{u_i\}$ and $\{v_i\}$ respectively:

$$A^{(n)} = Au_1 \oplus Au_2 \oplus \cdots \oplus Au_n, \qquad B^{(n)} = v_1 A \oplus v_2 A \oplus \cdots \oplus v_n A.$$

We shall define a pairing of $A^{(n)}$ and $B^{(n)}$ to A by

$$\left(\sum a_i u_i, \sum v_j b_j\right) = \sum a_i b_i \in A.$$

Then $A^{(n)}$ and $B^{(n)}$ form an orthogonal pair with respect to A. Since A is quasi-Frobenius, we have

$$\mathrm{Char}_A L_i = B^{(n)}/\mathrm{Ann}\,(L_i; B^{(n)}), \qquad i = 1, 2,$$

for two submodules L_i of A.

Hence if we define a homomorphism λ: $B^{(n)}/\mathrm{Ann}\,(L_2; B^{(n)}) \to B^{(n)}/\mathrm{Ann}\,(L_1; B^{(n)})$ by

$$\big(x, \lambda(\bar{y})\big) = \big(\vartheta(x), \bar{y}\big), \qquad x \in L_1,$$

for $\bar{y} \in B^{(n)}/\mathrm{Ann}\,(L_2, B^{(n)})$, then λ is an isomorphism onto, since ϑ is an isomorphism onto by assumption.

By Theorem 3.1, there exists an isomorphism Λ of $B^{(n)}$ onto itself which maps $\mathrm{Ann}\,(L_2; B^{(n)})$ onto $\mathrm{Ann}\,(L_1; B^{(n)})$ and induces the isomorphism λ. We shall define again a homomorphism Θ: $A^{(n)} \to A^{(n)}$ by

$$\big(\Theta(x), y\big) = \big(x, \Lambda(y)\big) \quad \text{for } x \in A^{(n)},\ y \in B^{(n)}.$$

Then Θ is an isomorphism onto. For $x \in L_1$, $y \in \mathrm{Ann}\,(L_2, B^{(n)})$ we have $\big(x, \Lambda(y)\big) = 0$ and hence $\Theta(x) \in L_2$, since $L_2 = \mathrm{Ann}\,\big(\mathrm{Ann}\,(L_2; B^{(n)}); A^{(n)}\big)$. Therefore we have

$$\big(\Theta(x), \bar{y}\big) = \big(x, \lambda(\bar{y})\big) \quad \text{for } x \in L_1,$$

and hence $\Theta(x) = \vartheta(x)$ for every $x \in L_1$. This proves the theorem.

COROLLARY 4.3. *Let A be a quasi-Frobenius ring. An isomorphism between two left submodules L_1 and L_2 of a free left A-module $A^{(n)}$ with n generators implies an isomorphism between two left residue class modules $A^{(n)}/L_1$ and $A^{(n)}/L_2$ of $A^{(n)}$. The same holds for right submodules of a finite free right A-module $B^{(n)}$.*

PROOF. It is obvious from Theorem 4.2.

THEOREM 4.4. *Let A be a ring with a unit element which satisfies the minimum condition for left and right ideals and let A possess the following property* (P):

If two left A-submodules L_1 and L_2 of a finite free left A-module $A^{(n)}$ are isomorphic to each other, then two residue class modules $A^{(n)}/L_1$ and $A^{(n)}/L_2$ are isomorphic to each other; similarly the same holds for right submodules of a finite free right A-module $B^{(n)}$ (where $n=1, 2, \ldots$).

Then A is a quasi-Frobenius ring.

PROOF. Let us denote the unit element of A by 1 and the radical of A by N; then we have two direct decompositions of A:

$$A=\sum_{\varkappa=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{f(\varkappa)} A e_{\varkappa,i}\Big)=\sum_{\varkappa=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{f(\varkappa)} e_{\varkappa,i} A\Big),$$

where $e_{\varkappa,i}$ are primitive mutually orthogonal idempotents, $1=\sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{i=1}^{f(\varkappa)} e_{\varkappa,i}$ and $Ae_{\varkappa,1}\cong Ae_{\varkappa,i}$, $Ae_{\varkappa,i}\ncong Ae_{\lambda,j}$ for $\varkappa\neq\lambda$. We put $e_\varkappa=e_{\varkappa,1}$, $E_\varkappa=\sum_i e_{\varkappa,i}$.

If we assume (P) for left simple ideals of A and if two simple left ideals L_1 and L_2 are isomorphic to each other, then by Theorem 3.1 there exists an element a of A such that $L_2=L_1 a$. Hence applying Lemma 2 of IKEDA ([3], p. 204), we obtain that there exists a permutation π of $(1, 2, \ldots, m)$ such that the largest completely reducible left subideal of $Ae_\varkappa$ is a direct sum of simple ideals, each of which is isomorphic to $Ae_{\pi(\varkappa)}$, $Ne_{\pi(\varkappa)}$ and $r(N)E_\varkappa=E_{\pi(\varkappa)}r(N)\subseteqq l(N)$.

Hence, from the property (P) for right and left simple ideals of A, we have the permutation π of $(1, 2, \ldots, m)$ and $r(N)E_\varkappa=E_{\pi(\varkappa)}l(N)$.

Suppose $e_{\pi(\varkappa)}l(N)\cong t\,\bar{e}_\varkappa\bar{A}$, $t>1$, where $\bar{e}_\varkappa\bar{A}\cong e_\varkappa A/e_\varkappa N$. Then there exist t elements c_j of $e_{\pi(\varkappa)}l(N)\ e_\varkappa$ such that

$$e_{\pi(\varkappa)}l(N)=\sum_{j=1}^{t} e_{\pi(\varkappa)}c_j e_\varkappa A\,.$$

Let $A^{(2)}=Au_1\oplus Au_2$ be a free left A-module with generators u_1 and u_2. Then $Ae_\varkappa u_1$ and $Ae_\varkappa u_2$ are, by the correspondence $1\leftrightarrow u_1\leftrightarrow u_2$, both isomorphic to the left ideal $Ae_\varkappa$. We construct a left A-module M_0 which is a direct sum of $Ae_\varkappa u_1$ and $Ae_\varkappa u_2$ and introduce into M_0 such a relation that an element $a_1e_\varkappa u_1$ of $Ae_\varkappa u_1$ and an element $a_2e_\varkappa u_2$ of $Ae_\varkappa u_2$ are identified if and only if there exists an element d of A satisfying $a_1e_\varkappa=dc_1e_\varkappa$ and $a_2e_\varkappa=dc_2e_\varkappa$; then we have a module M. It can be proved without much difficulty[5]) that M is a directly indecomposable left A-module.

Put $L_1=Ae_{\pi(\varkappa)}(c_1e_\varkappa u_1-c_2e_\varkappa u_2)$ and $L_2=Ae_{\pi(\varkappa)}c_1e_\varkappa u_1$; then clearly M is isomorphic to a residue class module M_0/L_1 and another residue class module M_0/L_2 is directly decomposable. Thus L_1 and L_2 are isomorphic to $A\bar{e}_{\pi(\varkappa)}$

[5]) See KOETHE's proof of his theorem ([5], p. 40); in our case it should be noted that $r(N)=l(N)$.

and hence to each other, but the residue class modules $(Au_1 \oplus Au_2)/L_1$ and $(Au_1 \oplus Au_2)/L_2$ of $(Au_1 \oplus Au_2)$ $(\cong A^{(2)})$ cannot be isomorphic to each other. This contradicts our property (P) for simple left modules.

Hence $e_{\pi(\varkappa)}l(N)$ is simple and similarly $r(N)e_\varkappa$ is also simple. This completes our proof.

REMARK. In order that $L \cong L'$ implies $M/L \cong M/L'$ for submodules L, L' of any left A-module M where M may not be free, it is necessary and sufficent that A be semisimple; indeed if $N \neq 0$, there exists some primitive idempotent e with $Ne \neq 0$ and hence if we construct $M = M_1 \oplus M_2$, $M_1 \cong Ae$, $M_2 \cong Ne$, and put $L = NM_1$, $L' = M_2$, then $L \cong L'$ but $M/L \ncong M/L'$.

From Corollary 4.3 and Theorem 4.4 we obtain

THEOREM 4.5. *Let A be a ring satisfying the minimum condition and possessing a unit element. A is quasi-Frobenius if and only if A possesses property (P).*

§5. (M_u)-Modules of quasi-Frobenius rings

Let L be a finite (= finitely generated) left A-module. L is called an (M_u)-module according to GASCHÜTZ [1], if the following condition is satisfied: For any finite left A-module M containing L as its A-submodule there exists some A-submodule L_0 such that M is the direct sum of L and L_0: $M = L \oplus L_0$. In case A is an algebra over a field, NAGAO and NAKAYAMA ([6], p. 169) have determined the structure of (M_u)-modules.

We shall first establish

THEOREM 5.1. *Let A be a quasi-Frobenius ring. A finite left A-module L is an (M_u)-module if and only if L is a direct sum of A-submodules each of which is isomorphic to some indecomposable direct summand $Ae_{\varkappa,i}$ of A* (for the meaning of $e_{\varkappa,i}$, cf. § 4).

To prove this theorem it is convenient to prove the following theorem.

THEOREM 5.2. *Let A be a quasi-Frobenius ring. Then any finite left A-module is isomorphic to a submodule of a finite free left A-module $A^{(n)}$ for suitable n.*

PROOF. For a left A-module L we take the character module of L. Then $\mathrm{Char}_A L$ is isomorphic to a residue class A-right module $B^{(n)}/R$. By Theorem 2.1 and Corollary 1.2 we have a left submodule L_1 of $A^{(n)}$ which is isomorphic to the $\mathrm{Char}_A B^{(n)}/R$. Thus L is isomorphic to L_1, because L is isomorphic to $\mathrm{Char}_A (B^{(n)}/R) \cong \mathrm{Char}_A (\mathrm{Char}_A L)$.

PROOF OF THEOREM 5.1. Let L be an (M_u)-module. Then by Theorem 5.2 we may assume that L is contained in a finite free A-module $A^{(n)}$ with some n. Since, by definition, L is a direct summand of $A^{(n)}$, we see at once that L has the structure asserted in the theorem.

Conversely, let L be a finite left A-module which is a direct sum of A-submodules each isomorphic to some $Ae_{\varkappa,i}$. Let M be any finite A-module containing L as its A-submodule. By Theorem 5.2 we can assume that M is contained in a finite free A-module $A^{(m)}$ with some m. Then by the

assumption concerning the structure of L there exists a direct-sum decomposition of $A^{(n)}$ with a suitable n ($\geq m$), such that

$$A^{(n)} = P \oplus Q, \quad \text{with } P \cong L.$$

Since by Theorem 4.2 the isomorphism $P \cong L$ can be extended to an isomorphism of $A^{(n)}$ onto itself, we have another direct-sum decomposition of $A^{(n)}$: $A^{(n)} = L \oplus Q_0$. Since $L \subseteq M \subseteq A^{(n)}$, we obtain at once the direct-sum decomposition of M: $M = L \oplus (M \cap Q_0)$. Thus L is an (M_u)-module.

Combining our theorem with a theorem of NAGAO-NAKAYAMA [6] we have

COROLLARY 5.3. *In case A is a quasi-Frobenius ring, the notions of (M_u)-modules and (M_0)-modules are identical.*

THEOREM 5.4. *Let A be a ring which contains a unit element and satisfies the minimum condition. Then A is quasi-Frobenius if and only if A is an (M_u)-module when considered as a left and a right A-module.*

PROOF. The "only if" part is obvious from Theorem 5.1. We shall prove the "if" part. First, assume that some right ideal $e_\lambda r(N)$ is neither simple nor zero. Then $e_\lambda r(N)$ has a composition series, say

$$e_\lambda r(N) = e_\lambda M_1 \supset e_\lambda M_2 \supset \cdots \supset e_\lambda M_t \supset (0),$$

where $t \geq 2$. If $e_\lambda M_1 / e_\lambda M_2 \cong \bar{e}_\varkappa \bar{A}$, $e_\lambda M_2 / e_\lambda M_3 \cong \bar{e}_\varrho \bar{A}$, where $\varkappa$ is not necessarily different from ϱ, then there exist elements c_1 and c_2 of $er(N)$ such that $c_1 = e_\lambda c_1 e_\varkappa \in e_\lambda M_1$, $c_2 = e_\lambda c_2 e_\varrho \in e_\lambda M_2$ and $c_1 \notin e_\lambda M_2$. Let $A^{(2)} = Au_1 \oplus Au_2$ be a free left A-module with generators u_1 and u_2. Since $Ae_\lambda c_1 \cong Ae_\lambda c_2 \cong \bar{A}\bar{e}_\lambda$, $Ae_\lambda c_1 e_\varkappa u_1$ and $A e_\lambda c_2 e_\varrho u_2$ are, by the correspondence $e_\lambda c_1 e_\varkappa u_1 \leftrightarrow e_\lambda c_2 e_\varrho u_2 \leftrightarrow \bar{e}_\lambda$, both isomorphic to the left simple ideal $\bar{A}\bar{e}_\lambda$. Now, we identify the submodules $Ac_1 e_\varkappa u_1$ and $Ac_2 e_\varrho u_2$ of Au_1 and $Ae_\varrho u_2$, and thus construct a new left module T:

$$T = (Au_1, Ae_\varrho u_2), \qquad Au_1 \cap Ae_\varrho u_2 = Ac_1 u_1 = Ac_2 u_2.$$

Then T clearly contains $Au_1 \cong A$. But Au_1 cannot appear in any direct decomposition of T as a direct summand as will be proved below. Thus we arrive at a contradiction to our assumption that A is a (M_u)-module as a left A-module. Hence we obtain that if A is a (M_u)-module as a left A-module then every $e_\lambda r(N)$ is either a simple right ideal or zero. Therefore $e_\lambda r(N) \subseteq e_\lambda l(N)$, and consequently $r(N) \subseteq l(N)$. Similarly if A is an (M_u)-module as a right A-module, then $l(N) e_\varkappa \subseteq r(N) e_\varkappa$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, m$, and hence $l(N) \subseteq r(N)$. Therefore we have $r(N) = l(N)$, and $e_\lambda r(N) = e_\lambda l(N)$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m$, are simple right ideals and $r(N) e_\lambda = l(N) e_\lambda$, are simple left ideals. This shows that A is quasi-Frobenius.

To complete our proof it remains to show that Au_1 cannot appear in any direct decomposition of T as a direct summand. Assume that $T = Au_1 \oplus Q$, for some submodule Q of T. Then we have

$$e_\varrho u_2 = e_\varrho y u_1 + e_\varrho q, \qquad \text{where } y \in A,\ q \in Q.$$

Hence $Q \supseteq A(-e_\varrho y u_1 + e_\varrho u_2)$. Here we consider an A-left homomorphism σ of Ae_ϱ onto $A(-e_\varrho y u_1 + e_\varrho u_2)$ defined by

$$\sigma: \quad a e_\varrho \to a(-e_\varrho y u_1 + e_\varrho u_2).$$

If the kernel H of σ is not zero, there exists a non-zero element h of H such that $-he_\varrho y u_1 - he_\varrho u_2 = 0$, and from the definition there exists an element a of A satisfying

$$he_\varrho y = ac_1 e_\varkappa, \quad \text{and} \quad he_\varrho = ac_2.$$

Since $Aac_2 = Ac_2$, we have $bhe_\varrho = bac_2 e_\varrho = c_2 e_\varrho$ and $bhe_\varrho y e_\varkappa = bac_1 e_\varkappa$ for a suitable element b of A. Hence $e_\lambda bae_\lambda c_2 - c_2 \neq 0$. Therefore $e_\lambda bae_\lambda$ is not contained in $e_\lambda N e_\lambda$, since $c_2 \in r(N)$. Hence there exists an inverse element $e_\lambda f e_\lambda$ of $e_\lambda bae_\lambda$ in $e_\lambda A e_\lambda$. Therefore we obtain

$$e_\lambda f e_\lambda bhe_\varrho y e_\varkappa = c_1, \quad \text{and} \quad e_\lambda f e_\lambda bhe_\varrho = c_2.$$

Hence $c_2 e_\varrho y e_\varkappa = c_1$, and this shows $c_1 \in e_\lambda M_2$, but it is a contradiction. This contradiction is caused from assumption $H \neq 0$. Hence σ must be an isomorphism. Hence $[Q]_l \geq [Ae_\varrho]_l$. From the assumption that T is a direct sum of Au_1 and Q, we have

$$[T]_l = [Au_1]_l + [Q]_l \geq [A]_l + [Ae_\varrho]_l.$$

On the other hand, by the definition of T,

$$[T]_l < [A]_l + [Ae_\varrho]_l.$$

This is a contradiction.

COROLLARY 5.5. *Let A be a ring possessing a unit element and satisfying the minimum condition. Then A is quasi-Frobenius if and only if all directly indecomposable summands $Ae_\varkappa$ and $e_\lambda A$, $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, m$ of A are (M_u)-modules.*

§ 6. A representation-theoretical characterization of quasi-Frobenius algebras

Let A be an algebra of a finite rank over a ground field F with a unit element, and let $S^{(n)}$ be a representation in F which is given by a representation module isomorphic to a finite free left A-module $A^{(n)}$. If we have two splittings of $S^{(n)}$ into constituents

$$S^{(n)} = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ * & K_1 \end{pmatrix}, \qquad S^{(n)} = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ * & K_2 \end{pmatrix},$$

then by Theorem 3.1 the two constituents K_1 and K_2 are equivalent as representations of A in F if H_1 is equivalent to H_2, and by Theorem 4.5 the converse holds when A is a quasi-Frobenius algebra.

For any representation H we can take a suitable representation $S^{(n)}$ so that H may appear at the left-upper corner of a reduced form of $S^{(n)}$:

$$S^{(n)} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ * & K \end{pmatrix},$$

but it is not always possible to find $S^{(n)}$ with

$$S^{(n)} = \begin{pmatrix} K' & 0 \\ * & H \end{pmatrix}.$$

Now we shall prove

THEOREM 6.1. *Let A be an algebra of a finite rank over a ground field F with a unit element. If every representation H of A appears at the right-lower corner of a splitting form of $S^{(n)}$ with a suitable n:*

$$S^{(n)} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ * & H \end{pmatrix},$$

then A is quasi-Frobenius, and conversely.

PROOF. We shall prove the first part of the theorem. Let H be a representation which is given by a primitive right ideal $e_\varkappa A$ as a representation module; then the dual module $(e_\varkappa A)^*$ of $e_\varkappa A$ is, by assumption, contained in a finite free left A-module $A^{(n)}$. By a theorem of NAGAO and NAKAYAMA ([6], p. 169), the left A-module $(e_\varkappa A)^*$ is an (M_u)-module. Hence, there exists a primitive left ideal Ae_λ such that $Ae_\lambda \cong (e_\varkappa A)^*$. This shows that A is a quasi-Frobenius algebra.

The converse is obtained from Theorem 5.2.

References

[1] GASCHÜTZ, W.: Über den Fundamentalsatz von MASCHKE zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [2] GASCHÜTZ, W.: Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden. Math. Z. **60**, 274—286 (1954). — [3] IKEDA, M.: A characterization of quasi-Frobenius ring. Osaka Math. J. **4**, 203—209 (1952). — [4] YUTAKA KAWADA: A note on isomorphism and similarity of ideals (forthcoming in J. Math. Soc. Japan). — [5] KOETHE, G.: Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorring. Math. Z. **39**, 31—44 (1934). — [6] NAGAO, H., and T. NAKAYAMA: On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules. Math. Z. **59**, 164—170 (1953). — [7] NAKAYAMA, T.: On Frobeniusean algebra II. Ann. of Math. **42**, 1—21 (1941). — [8] NAKAYAMA, T., and G. AZUMAYA: Algebra II (in Japanese). Tokyo 1954. — [9] NESBITT, C. J., and R. M. THRALL: Some ring theorems with applications to modular representation. Ann. of Math. **47**, 551—567 (1946). — [10] PONTRJAGIN, L.: Topologiale groups. Princeton Univ. Press 1939. — [11] THRALL, R. M.: Some generalizations of quasi-Frobenius algebras. Trans. Amer. Math Soc. **64**, 173—183 (1948).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 14. Februar 1956)

Schöneborn, H.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 429—441 (1956)

Über den Zusammenhang zwischen Dualitäts- und Vollständigkeitseigenschaften bei gewissen topologischen Abelschen Gruppen

Von

Heinz Schöneborn

In der vorliegenden Note werden die vom Verf. in zwei vorangegangenen Arbeiten [3] und ([4][1]) betrachteten topologischen, primären, Abelschen Gruppen unter zusätzlichen Abzählbarkeitsvoraussetzungen im Hinblick auf ihre (Cauchy-)Vollständigkeits- und ihre Dualitätseigenschaften (bei Charakterengruppenbildung) untersucht. Es wird gezeigt, wie sich der Begriff der Vollständigkeit und gewisse in früheren Untersuchungen in Verbindung damit auftretende Begriffsbildungen in durchsichtiger Weise dualisieren und zueinander in Beziehung setzen lassen und ferner, daß zwischen diesen Vollständigkeitseigenschaften und der Eigenschaft, selbstdual[2]) zu sein, ein einfacher Zusammenhang besteht. Insbesondere wird dadurch auch die Frage nach der Gültigkeit des Pontrjaginschen Dualitätssatzes für die betrachteten Gruppen völlig und in befriedigender Weise gelöst, indem einfache und wohlbekannte Vollständigkeitseigenschaften als notwendige und hinreichende Kriterien dafür gewonnen werden[3]).

In Nr. 1 werden die Begriffe der „Abzählbarartigkeit" und „schwachen Abzählbarartigkeit" als Verallgemeinerungen des ersten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxioms eingeführt. Ihre Bedeutung für unsere Betrachtungen beruht darauf, daß sie (im Gegensatz zum ersten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom) bei Übergang zur Charakterengruppe erhalten bleiben. Unter die „schwach abzählbarartigen" Gruppen fallen insbesondere z. B. die lokalkompakten Gruppen (ohne irgendeine Abzählbarkeitsvoraussetzung). — In Nr. 2 wird zur Eigenschaft der (Cauchy-)Vollständigkeit die sich später als

[1]) In Zukunft zitiert mit Sch. I bzw. Sch. II.

[2]) Eine Gruppe A heißt „selbstdual", wenn der Pontrjaginsche Dualitätssatz — im folgenden auch kurz als „Dualitätssatz" bezeichnet — für A gilt.

[3]) Eine ohne Abzählbarkeitsvoraussetzungen gültige notwendige und hinreichende Bedingung für die Richtigkeit des Dualitätssatzes für eine torsionstopologische zyklovollständige, primäre Abelsche Gruppe (vgl. den Schluß der Einleitung) ergibt sich sofort aus Sch. II Satz 7 in Verbindung mit einem von H. Leptin hergeleiteten Satz ([1] Satz S. 261). Man hat hierbei nur zu beachten, daß unter Voraussetzung der für die Gültigkeit des Dualitätssatzes notwendigen Bedingung (K_1) aus Sch. II Satz 6 die von Leptin in [1] zugrunde gelegte Topologisierung der Charakterengruppen mit der üblichen und vom Verf. verwendeten übereinstimmt. — Für den hier behandelten Sonderfall abzählbarartiger Gruppen ergeben sich — wie gezeigt wird [vgl. unten (3.1) und anschließende Bemerkungen] — andere und unter Umständen handlichere Kriterien.

dazu dual erweisende der „Antivollständigkeit" definiert und beide Vollständigkeitseigenschaften werden in Beziehung gesetzt zu gewissen in früheren Untersuchungen (Sch. II und [1]) über den Dualitätssatz aufgetretenen Bedingungen. — Nr. 3 enthält als Hauptresultat den Satz (3.1), welcher unter anderem die Äquivalenz von Vollständigkeit und Antivollständigkeit einerseits und Dualitätssatz andererseits aussagt. — In Nr. 4 und Nr. 5 wird die (vorher schon hervorgetretene) Dualität einiger wichtiger Begriffe wie „vollständig" und „antivollständig", „präkompakt" und „prädiskret" usw. genauer gefaßt und näher untersucht und auf einige naheliegende offengebliebene Fragen und Verallgemeinerungsmöglichkeiten hingewiesen.

Alle im folgenden betrachteten Gruppen sind, auch wenn nicht ausdrücklich hervorgehoben, additiv geschriebene „torsionstopologische, zyklovollständige, primäre, Abelsche Gruppen" im Sinne von Sch. I Nr. 1—4, d.h. topologische Abelsche Gruppen A, deren Topologie den folgenden Bedingungen genügt:

1. Es gibt ein aus offenen Untergruppen A_α von A bestehendes vollständiges System von Nullumgebungen in A, derart, daß jedes von Null verschiedene $a \in A$ von Primzahlpotenzordnung modulo jedem A_α ist.

2. Die in A abgeschlossenen Hüllen der (gewöhnlichen) zyklischen Untergruppen von A sind (Cauchy-)vollständig.

Wie in Sch. I gezeigt wurde, sind dann die in A abgeschlossenen Hüllen der zyklischen Untergruppen von A topologisch isomorph entweder zur Additionsgruppe $\mathfrak{R}_p$ des Ringes der ganz-p-adischen Zahlen (p = ganz-rationale Primzahl) oder zu gewöhnlichen zyklischen p-Gruppen und A besitzt den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als „natürlichen Operatorenbereich".

Die Menge aller offenen Untergruppen von A bildet einen „*Filter*" im Sinne von Sch. I Nr. 1, den sog. „*charakteristischen Filter*" von A. Hinsichtlich der Grundbegriffe „Filterbasis", „topologischer Homomorphismus", „TYCHONOFF-Summe" usw. s. gleichfalls Sch. I Nr. 1.

1. A sei eine zyklovollständige, Abelsche, primäre topologische Gruppe.

Definition. A heißt „*abzählbarartig*", wenn mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Der charakteristische Filter von A besitzt eine aus abzählbar vielen offenen Untergruppen A_i bestehende Basis $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ (1. HAUSDORFFsches Abzählbarkeitsaxiom).

2. Es gibt eine abgezählte aufsteigende Kette $K_0 = 0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ kompakter Untergruppen K_i in A, so daß jede kompakte Untermenge von A in (mindestens) einer der Untergruppen K_i enthalten ist. — Genauer heißt A „*abzählbarartig von 1. Art*" bzw. „*abzählbarartig von 2. Art*", je nachdem die erste oder die zweite der obigen Bedingungen erfüllt ist.

Versteht man — wie üblich — unter einer Gruppe vom Typus p^∞ eine diskrete Torsionsgruppe mit abzählbar vielen Erzeugenden a_i mit den Relationen $p \cdot a_1 = 0$, $p \cdot a_2 = a_1$, $p \cdot a_3 = a_2$, ... (p ganz-rationale Primzahl), dann bildet die topologische direkte Summe („TYCHONOFF-Summe"; vgl. Sch. I S. 459) abzählbar vieler Gruppen vom Typus p^∞ ein Beispiel für eine abzähl-

barartige Gruppe von 1. Art, welche nicht von 2. Art ist. Sind umgekehrt $\mathfrak{R}_{p,i}^{+}$ $(i=1, 2, \ldots)$ Gruppen vom Typus der (kompakten) Additionsgruppe der ganz-p-adischen Zahlen, A die gewöhnliche direkte Summe der $\mathfrak{R}_{p,i}^{+}$ mit der Topologie, die durch den charakteristischen Filter aller (operatorzulässigen) Untergruppen $A_\varkappa$ von A, deren Restklassengruppe $A/A_\varkappa$ eine Torsionsgruppe ist, definiert wird, so ist A abzählbarartig von 2. Art, nicht aber von 1. Art. — Ebenso ist jede diskrete Gruppe abzählbarartig von 1. Art, während jede kompakte Gruppe abzählbarartig von 2. Art ist.

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine abzählbarartige Gruppe gleichzeitig abzählbarartig von 1. und von 2. Art ist, wird beantwortet durch

(1.1) *Eine Gruppe A ist genau dann abzählbarartig gleichzeitig von 1. und von 2. Art, wenn sie lokalkompakt ist und dem 2.* HAUSDORFF*schen Abzählbarkeitsaxiom genügt.*

Beweis. Sei A lokalkompakt und genüge dem 2. Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist A natürlich abzählbarartig von 1. Art und besitzt eine offene, kompakte, dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügende Untergruppe K_1. A/K_1 ist diskret und abzählbar und durch sukzessive Hinzunahme je endlich vieler mod K_1 verschiedener Elemente von A zu K_1 konstruiert man der Reihe nach eine aufsteigende Kette $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ kompakter Gruppen, hinsichtlich deren A abzählbarartig von 2. Art ist. — Umgekehrt: Sei A abzählbarartig von 1. und von 2. Art, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ein absteigendes vollständiges System offener Untergruppen, $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ ein aufsteigendes System kompakter Untergruppen, hinsichtlich dessen A abzählbarartig von 2. Art ist. Natürlich genügen die K_i dem 2. Abzählbarkeitsaxiom. Wäre keine der Gruppen K_i offen, d.h. enthielte keines der K_i irgendeine der Gruppen A_j, so gäbe es zu jedem Paar i, j $(i, j=1, 2, \ldots)$ ein $a_{ij} \in A$ mit $a_{ij} \in A_j$, $a_{ij} \notin K_i$. Die Folge $a_{11}, a_{22}, \ldots$ ist eine Nullfolge, also, wenn man Null hinzunimmt, eine kompakte Menge und diese läge nach Konstruktion in keinem der K_i — im Widerspruch zu der Abzählbarartigkeit 2. Art von A. Mithin ist eines der K_i, etwa K_1, offen und A lokalkompakt. Die diskrete Restklassengruppe A/K_1 ist, da K_1 kompakt, mit A offenbar abzählbarartig 2. Art, also abzählbar. Und hieraus folgt, daß A dem 2. Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Definition. Die Gruppe A heißt *„schwach abzählbarartig von 1. Art"* bzw. *„schwach abzählbarartig von 2. Art"*, wenn die erste bzw. die zweite der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. A enthält eine kompakte Untergruppe K, so daß A/K abzählbarartig von 1. Art ist.

2. A enthält eine offene Untergruppe A', welche abzählbarartig von 2. Art ist.

Offenbar ist jede abzählbarartige Gruppe auch schwach abzählbarartig von der gleichen Art, während eine beliebige lokalkompakte Gruppe nicht notwendig abzählbarartig von 1. oder 2. Art, wohl aber stets schwach abzählbarartig von 1. und von 2. Art ist.

(1.2) *Die Gruppe A ist genau dann schwach abzählbarartig von 1. und von 2. Art, wenn sie lokalkompakt ist.*

Es bleibt nur zu beweisen: Ist A schwach abzählbarartig von 1. und von 2. Art, dann ist A lokalkompakt. In der Tat: Sei K kompakt, so daß A/K abzählbarartig von 1. Art und A' offen und abzählbarartig von 2. Art. Dann ist $A'/A' \cap K = (A'+K)/K$ abzählbarartig von 1. Art und mit A' und wegen der Kompaktheit von $A' \cap K$ gleichzeitig abzählbarartig von 2. Art. Nach (1.1) ist also $A'/A' \cap K$ lokalkompakt und genügt dem 2. Abzählbarkeitsaxiom, woraus die lokale Kompaktheit von A' und damit die von A folgt.

Da sich die Sätze der folgenden Paragraphen von abzählbarartigen Gruppen fast mühelos auf schwach abzählbarartige Gruppen übertragen lassen, beschränken wir uns der Einfachheit und Kürze halber im folgenden auf die auf abzählbarartige Gruppe bezüglichen Betrachtungen.

2. (2.1) *Eine abzählbarartige Gruppe A von 1. Art ist dann und nur dann vollständig, wenn die folgende Bedingung* (K) *erfüllt ist:*

(K) *Jede abgeschlossene Untergruppe von A mit kompaktem Erzeugendensystem ist kompakt*[4]).

Eine abzählbarartige Gruppe 2. Art genügt der Bedingung (K) *immer, ist aber nicht notwendig vollständig.*

Beweis. Ist A vollständig, so gilt (K) nach Sch. II Satz 1a. — Genüge nun A der Bedingung (K) und sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Cauchy-Folge aus A. Dann ist $\lim(a_i - a_{i+1}) = 0$ und die Elemente $a_1, (a_1 - a_2), (a_2 - a_3), \ldots$ bilden zusammen mit der 0 eine kompakte Untermenge von A, erzeugen wegen (K) also eine kompakte Untergruppe K. Diese enthält alle Elemente a_i und mithin existiert in K und erst recht in $A \supseteq K$ der $\lim a_i$, woraus die Vollständigkeit von A folgt. — Für abzählbarartige Gruppen 2. Art folgt (K) aus der Definition. Ein einfaches Beispiel für eine nicht vollständige abzählbarartige Gruppe 2. Art bildet die von H. LEPTIN [2] § 6 angegebene Gruppe: Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele zyklische Gruppen von der gleichen Primzahlordnung p, $A = \sum A_i$ die gewöhnliche direkte Summe der A_i. Topologisiert man A, indem man sämtliche Untergruppen von endlichem Index in A für offen erklärt, dann ist A präkompakt[5]), aber nicht kompakt, also nicht vollständig und außerdem erweisen sich sämtliche kompakten Untermengen von A als endlich. Mithin ist A eine nicht vollständige abzählbarartige Gruppe 2. Art.

Dem Begriff der Vollständigkeit einer Gruppe A stellen wir den — wie sich zeigen wird — dazu weitgehend dualen der Antivollständigkeit gegenüber.

Definition. Die (nicht notwendig abzählbarartige) Gruppe A heißt *„antivollständig"*, wenn gilt: Ist A' eine beliebige Untergruppe von A derart, daß

[4]) Identisch mit der in Sch. II S. 24 formulierten und dort mit (K_1) bezeichneten Bedingung.

[5]) Eine Gruppe heißt präkompakt, wenn ihre vollständige Hülle kompakt ist. Die torsionstopologische Gruppe A ist genau dann präkompakt, wenn sämtliche offene Untergruppen von endlichem Index in A sind.

für jede kompakte Untergruppe $K \subseteq A$ der Durchschnitt $A' \cap K$ offen in K ist, dann ist A' offen in A.

Als Gegenstück zu (2.1) gilt jetzt:

(2.2) *Eine abzählbarartige Gruppe A von 2. Art ist dann und nur dann antivollständig, wenn die folgende Bedingung* (L) *erfüllt ist:*

(L) *Ist A' eine abgeschlossene Untergruppe von A derart, daß alle kompakten Untermengen von A/A' endlich sind, dann ist A' offen in A.*

Eine abzählbarartige Gruppe 1. Art genügt der Bedienung (L) *immer, ist aber nicht notwendig antivollständig.*

Beweis. A sei abzählbarartig von 2. Art und antivollständig, A' eine abgeschlossene Untergruppe von A der in (L) genannten Art. Dann ist für jede kompakte Untergruppe K von A sicher $K/A' \cap K$ endlich, also $A' \cap K$ offen in K und wegen der Antivollständigkeit ist A' offen in A, A/A' diskret — woraus (L) folgt. Genüge nun die von 2. Art abzählbarartige Gruppe A der Bedingung (L) und sei A' eine beliebige Untergruppe von A derart, daß für alle kompakten Untergruppen $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ von A, hinsichtlich deren A abzählbarartig von 2. Art ist, der Durchschnitt $K_i \cap A'$ offen in K_i ist. Dann existiert zu jedem K_i eine offene Untergruppe A_i von A mit $K_i \cap A_i = K_i \cap A'$. Da die K_i eine aufsteigende Folge bilden, gilt jetzt für jedes $m \geqq 1$:

$$K_m \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \subseteq K_m \cap A'$$

und (natürlich) offen in K_m, $K_m \cap A_{m-1} \cap A_{m-2} \cap \cdots = K_m \cap A'$, also $K_m \cap \left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq K_m \cap A'$ und offen in K_m. Für $B = \bigcap A_i$ ist also $B \subseteq A'$ und in A/B ist jede kompakte Untermenge endlich. Nach (L) ist also B und mithin auch A' offen in A — woraus die Antivollständigkeit von A folgt. — Sei nun A abzählbarartig von 1. Art und A' eine abgeschlossene Untergruppe der in (L) genannten Art. Wäre A' nicht offen in A, so gäbe es eine Nullfolge $a_1, a_2, \ldots$ $(a_i \in A)$ mit $a_i \notin A'$ und $\bar{A} = A/A'$ enthielte im Widerspruch zur Definition von A' die unendliche kompakte Untermenge $\bar{0}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$. Mithin ist (L) erfüllt. — Daß aber eine von 1. Art abzählbarartige Gruppe A nicht antivollständig zu sein braucht, zeigt das Beispiel der gewöhnlichen direkten Summe $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, wo die A_i Gruppen der festen Primzahlordnung p sind, wenn in A die Untergruppe von der Form $A^{(j)} = \sum_{i \neq j} A_i$ für offen erklärt werden. In A ist jede kompakte Untergruppe endlich, aber die 0 ist nicht offen in A.

Die Bedeutung der Bedingung (L) wird noch verdeutlicht und in Beziehung zu der vom Verf. in Sch. II S. 29 aufgestellten Forderung (K_2) gebracht durch

(2.3) *A sei abzählbarartig. Dann gilt* (L) *genau dann, wenn die folgende Bedingung* (K_2) *erfüllt ist:*

(K_2) *Ist M eine Untermenge von A, $a \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine kompakte Untermenge N von A derart, daß a bereits Häufungspunkt von $N \cap M$ ist.*

Dem Beweis von (2.3) schicken wir den folgenden Hilfssatz voran:

(2.4) *Genügt A der Bedingung* (K), *dann ist* (K_2) *äquivalent zu jeder der beiden folgenden Bedingungen:*

(a) *Ist M eine Untermenge von A, $a \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine kompakte Untergruppe K von A, so daß a Häufungspunkt von $M \cap K$ ist.*

(b) *Ist für eine Untermenge M und für jede kompakte Untergruppe K von A stets $M \cap K$ offen in K, dann ist M offen in A.*

Beweis von (2.4). Die Äquivalenz von (a) und (K_2) unter der Voraussetzung (K) ist klar. Wir beweisen die Äquivalenz von (a) und (b). Aus (a) folgt (b): Sei M' das Komplement von M in A und $M' \cap K$ abgeschlossen in K für jede kompakte Untergruppe K von A. $a \in A$ sei ein Häufungspunkt von M'. Wegen (a) existiert eine kompakte Untergruppe K' von A, so daß a Häufungspunkt von $M' \cap K'$, also $a \in M' \cap K' \subseteq M'$ ist, d.h. M' ist abgeschlossen, also M offen in A. — Aus (b) folgt (a): Sei $a \in A$ Häufungspunkt von $M \subseteq A$, $\overline{M}$ die in A abgeschlossene Hülle von M, M' die Menge aller Elemente von $\overline{M}$ mit Ausnahme von a. Wäre für keine kompakte Untergruppe K von A das Element a Häufungspunkt von $K \cap M$, so wäre $M' \cap K$ abgeschlossen in K für jedes K, d.h. für das (a enthaltende) Komplement M'' von M' in A wäre $M'' \cap K$ in K offen für jedes K, also wegen (b) M'' offen in A und $a \in M''$ kann nicht Häufungspunkt von M sein.

Beweis von (2.3). Ist A abzählbarartig von 1. Art, dann ist (L) nach (2.2) immer erfüllt und ebenso gilt stets (K_2), da, wenn $a \in A$ Häufungspunkt von $M \subseteq A$ ist, eine gegen a konvergente Folge aus M existiert. Im Falle der abzählbarartigen Gruppen 1. Art ist also nichts zu beweisen. — Sei nun A abzählbarartig von 2. Art. Dann ist (L) eine Folge von (K_2). Sei nämlich A' eine abgeschlossene Untergruppe von A derart, daß in $\bar{A} = A/A'$ jede kompakte Untermenge endlich ist. f sei die kanonische Abbildung von A auf $\bar{A}$, $M \subseteq A$ und $a \in A$ ein Häufungspunkt von M. Dann ist $\bar{a} = f(a)$ entweder in $\overline{M} = f(M)$ enthalten oder Häufungspunkt von $\overline{M}$. Wegen (2.4) (a) existiert eine kompakte Untergruppe K von A, so daß a Häufungspunkt von $K \cap M$ ist. Aus der Endlichkeit von $f(K \cap M)$ folgt $\bar{a} \in f(K \cap M) \subseteq \overline{M}$ d.h. aus „a Häufungspunkt von M" folgt, daß die a enthaltende Nebenschar mod A' ein Element von M enthalten muß. Die zu diesem Resultat führenden Voraussetzungen und Schlüsse bleiben — wie leicht zu sehen — erhalten, wenn A' durch den Durchschnitt $A' \cap A_\alpha$, wo A_α eine beliebige offene Untergruppe von A ist, ersetzt wird. Es ergibt sich, daß sich die durch die Zuordnung der Häufungspunkte definierte Topologie von A nicht ändert, wenn A' zum System der offenen Untergruppen von A hinzugenommen wird, d.h. A' ist offen.

Sei nun umgekehrt (L) erfüllt und also nach (2.2) A antivollständig. $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ sei eine Folge kompakter Gruppen, hinsichtlich deren A abzählbarartig von 2. Art ist. Ist nun $M \subseteq A$ mit $0 \in M$ und $M \cap K_i$ offen in K_i für alle i, so existiert zunächst in $M \cap K_1$ eine in K_1 offene Untergruppe B_1'.

B_1' ist eine in $M \cap K_2$ enthaltene abgeschlossene Untergruppe von K_2 und Durchschnitt aller B_1' enthaltenden offenen Untergruppen $K_2^{(j)}$ von K_2. Aus $\bigcap_j K_2^{(j)} = B_1' \subseteq K_2 \cap M$ und den Offenheits- bzw. Abgeschlossenheitseigenschaften dieser Mengen sowie der Kompaktheit von K_2 folgt jetzt leicht die Existenz einer in K_2 offenen Untergruppe B_2' mit $B_1' \subseteq B_2' \subseteq K_2 \cap M$ usw. Ist B die Vereinigungsmenge der B_i', so ist B eine Untergruppe von A mit $B \subseteq M$ und $B \cap K_i \supseteq B_i'$ offen in K_i und wegen der Antivollständigkeit ist B offen in A. M enthält also mit 0 eine in A offene Umgebung der 0 und genau so ergibt sich das entsprechende für jedes Element von M. Daraus folgt, daß M offen in A ist und nach (2.4) folgt (K_2).

3. Die Sätze der vorangegangenen Nummern sowie die insbesondere in Sch. II hergeleiteten Sätze und Begriffsbildungen — vor allem über die Charakterengruppen einer primären, zyklovollständigen, torsionstopologischen, Abelschen Gruppe — erlauben jetzt die Formulierung des folgenden Hauptsatzes:

(3.1) *Sei A abzählbarartig. Dann sind die folgenden Aussagen* (1) *bis* (4) *zueinander äquivalent:*

(1) *A genügt den Bedingungen* (K) *und* (L) *aus* (2.1) *bzw.* (2.2).

(2) *A genügt den Bedingungen* (K) *und* (K_2) *aus* (2.1) *bzw.* (2.3).

(3) *A genügt dem Dualitätssatz, d.h. die (wie üblich gebildete und mit p-adischen Operatoren versehene — vgl. Sch. II Nr. 2 und 3) Charakterengruppe $C[C[A]]$ der Charakterengruppe $C[A]$ von A ist zu A (hinsichtlich der üblichen Abbildung φ von A in $C[C[A]]$ — vgl. Sch. II Nr. 5) topologisch isomorph.*

(4) *A ist vollständig und antivollständig.*

Beweis. Aus (1) folgt (2) und aus (2) folgt (1). Dies ist der Inhalt von (2.3). Aus (2) folgt (3). Dies ergibt sich aus dem Satz 7 von Sch. II. — Aus dem gleichen Satz folgt auch, daß für eine (3) genügende Gruppe die Bedingung (K) erfüllt ist. Wir zeigen, daß auch (L) und damit (1) aus (3) folgt: Ist A abzählbarartig von 1. Art, dann ist (L) nach (2.2) immer erfüllt und nichts weiter zu beweisen. Sei A abzählbarartig von 2. Art und (3) erfüllt. Dann ist $C[A]$ — wie leicht zu sehen — abzählbarartig von 1. Art und genügt ebenfalls dem Dualitätssatz, also auch der Bedingung (K) und ist nach (2.1) vollständig. A' sei eine abgeschlossene Untergruppe von A, so daß in A/A' alle kompakten Untermengen endlich sind. Dann sind in dem Annullator $C_{A'} \subseteq C[A]$ von A' in $C[A]$ alle offenen Untergruppen von endlichem Index und wegen der Vollständigkeit von $C[A]$ und der Abgeschlossenheit von $C_{A'}$ in $C[A]$ ist auch $C_{A'}$ vollständig, also kompakt. Mithin ist der Annullator $A^{*\prime} \subseteq C[C[A]]$ von $C_{A'}$ in $C[C[A]]$ offen. $A^{*\prime}$ ist aber genau die A' entsprechende Untergruppe bei der den topologischen Isomorphismus von A auf A^* vermittelnden Abbildung φ und mithin ist A' offen in A. Hieraus folgt (L). — Damit ist gezeigt, daß (1), (2) und (3) äquivalent sind. Sei jetzt (4) erfüllt. Aus (2.1) und (2.2) folgt dann die Gültigkeit von (K) und (L), d.h. (1). — Sei umgekehrt (1) und damit (2) und (3) für A erfüllt. Wir haben

die Vollständigkeit und die Antivollständigkeit von A zu zeigen. Ist zunächst A von 1. Art, dann folgt die Vollständigkeit von A wegen (K) aus (2.1). Ferner ergibt sich die Antivollständigkeit von A wegen der Gültigkeit von (K_2) aus (2.4) (b). Ist aber A von 2. Art, so kann A wegen (3) als Charakterengruppe einer gleichfalls dem Dualitätssatz genügenden Gruppe A^0 von 1. Art angesehen werden. Da A^0 der Bedingung (K_2) genügt, ist A vollständig nach Sch. II S. 29. Die Antivollständigkeit von A ist wegen (L) eine Folge von (2.2). Damit ist alles bewiesen.

Durch (3.1) ist also insbesondere gezeigt, daß die in Sch. II Satz 7 in Verbindung mit (K) als hinreichend für die Gültigkeit des Dualitätssatzes nachgewiesene Bedingung (K_2) im abzählbarartigen Falle auch notwendig ist. Ferner ist durch (3.1) die Frage nach der Gültigkeit des Dualitätssatzes auf die nach der geläufigen und vielfach leicht zu verifizierenden Eigenschaft der Vollständigkeit und die dazu duale der Antivollständigkeit zurückgeführt. Die Frage, inwieweit die Eigenschaften der Vollständigkeit und der Antivollständigkeit [und entsprechend auch die Eigenschaften (K) und (L)] insbesondere im Hinblick auf Charakterengruppenbildung als zueinander „dual" betrachtet werden können, wird in der nächsten Nummer behandelt. — Im folgenden sollen noch einige Eigenschaften der Charakterengruppe $C[A]$ einer abzählbarartigen Gruppe A betrachtet werden:

(3.2) *Ist A abzählbarartig, so ist $C[A]$ (und damit auch jede höhere Charakterengruppe von A) vollständig und antivollständig.*

Beweis. Sei zunächst A von 1. Art. $\hat{A}$ sei die vollständige Hülle von A, $c \in C[A]$ ein Charakter von A. Wir definieren nun einen Charakter $\hat{c}$ von $\hat{A}$ folgendermaßen: Für $a \in A$ setzen wir $\hat{c}(a) = c(a)$ [wo $c(a)$ natürlich das Bild von a in der zur Bildung der Charaktere benutzten Bezugsgruppe Z bedeutet — vgl. Sch. II S. 18f.]. Ist allgemeiner $\hat{a} = \lim a_i \in \hat{A}$ $(a_i \in A, i = 1, 2, \ldots)$, so gilt für fast alle i: $c(a_i) = c(a_{i+1})$ und wir setzen $\hat{c}(\hat{a}) = c(a_i)$ für hinreichend großes i. Dann hängt $\hat{c}(\hat{a})$ unabhängig von der speziellen Wahl der gegen $\hat{a}$ konvergenten Folge der $a_i \in A$ nur von c (und natürlich $\hat{a}$) ab und wir haben so zu jeder Abbildung c von A eindeutig eine Abbildung $\hat{c}$ von $\hat{A}$ definiert und zu verschiedenen c gehören verschiedene $\hat{c}$. Wie leicht zu sehen, ist jedes solche $\hat{c}$ ein Homomorphismus von $\hat{A}$ in die Bezugsgruppe Z und der Kern von $\hat{c}$ in $\hat{A}$ ist einfach die in $\hat{A}$ abgeschlossene Hülle des Kerns des zu $\hat{c}$ gehörigen Homomorphismus c von A in Z. Mithin ist $\hat{c}$ ein Charakter von $\hat{A}$ und jeder Charakter von $\hat{A}$ kann so erhalten werden. Die Charakterengruppen $C[A]$ und $C[\hat{A}]$ sind also hinsichtlich der oben definierten Zuordnung der $c \in C[A]$ zu den $\hat{c} \in C[\hat{A}]$ zunächst algebraisch (Operator-)isomorph. Um zu zeigen, daß $C[A]$ und $C[\hat{A}]$ aber sogar topologisch isomorph sind, genügt es zu beachten: a) Ist $B \subseteq A$ eine Untergruppe mit kompakten Erzeugendensystem von A, so besitzt die in $\hat{A}$ abgeschlossene Hülle $\tilde{B}$ von B gleichfalls ein kompaktes Erzeugendensystem. b) Ist $\hat{B}$ eine Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem von $\hat{A}$, dann gibt es eine Untergruppe B

von A mit kompaktem Erzeugendensystem, so daß $\hat{B}$ in der in $\hat{A}$ abgeschlossenen Hülle $\tilde{B}$ von B enthalten ist. a) ist fast trivial, während b) im vorliegenden Falle (A genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom!) in geläufiger Weise durch ein Diagonalverfahren bewiesen werden kann. Aus a) folgt, daß die Topologie von $C[A]$ höchstens feiner ist als die von $C[\hat{A}]$, während zufolge b) die Topologie von $C[A]$ höchstens gröber als die von $C[\hat{A}]$ sein muß. Mithin können $C[A]$ und $C[\hat{A}]$ identifiziert werden und $C[A]$ genügt mit $C[\hat{A}]$ nach (3.1) dem Dualitätssatz, ist also — wieder nach (3.1) — vollständig und antivollständig. — Ist nun A von 2. Art, dann $C[A]$ ersichtlich von 1. Art und man sieht leicht, daß $C[A]$ der Bedingung (K) genügt, also nach (2.1) vollständig und wegen der Gültigkeit von (K_2) nach (2.3) und (3.1) auch antivollständig ist.

4. In dieser Nummer sollen die wichtigsten der bisher aufgetretenen Eigenschaften wie Vollständigkeit, Antivollständigkeit, (K) und (L) im Hinblick auf ihre „Dualität" untersucht werden. Zunächst stellen wir dem in Sch. I definierten Begriff des Filters den des „Antifilters" gegenüber:

Definition. Ein System $\mathfrak{u}$ von Nebenscharen U_μ nach abgeschlossenen Untergruppen B_μ der Gruppe A heißt ein „*Antifilter*" (in A), wenn I. mit den endlich vielen Nebenscharen $U_{\mu_1}, \ldots, U_{\mu_n}$ der Untergruppen $B_{\mu_1}, \ldots, B_{\mu_n}$ auch die die U_{μ_i} enthaltende Nebenschar der abgeschlossenen Vereinigungsgruppe der B_{μ_i} und II. mit U_μ auch jede abgeschlossene in U_μ enthaltene Nebenschar zu $\mathfrak{u}$ gehört.

Ein Teilsystem $\mathfrak{b}_\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{u}$ heißt eine *Basis* des Antifilters $\mathfrak{u}$, wenn $\mathfrak{b}_\mathfrak{u}$ der obigen Bedingung I. genügt und jede Schar aus $\mathfrak{u}$ in einer Schar aus $\mathfrak{b}_\mathfrak{u}$ enthalten ist.

Die weitere Dualisierung der auf Filter bezüglichen Grundbegriffe zu solchen, die sich auf Antifilter beziehen, ist — soweit hier von Bedeutung — so leicht, daß auf eine Darstellung im einzelnen verzichtet werden kann.

Unter dem „*charakteristischen Antifilter*" $\mathfrak{s}$ einer Gruppe A verstehen wir den von den kompakten Untergruppen von A gebildeten Antifilter.

Weitere wichtige Antifilter in der Gruppe A sind:

Der Antifilter $\mathfrak{s}'$ aller abgeschlossenen Untergruppen mit kompaktem Erzeugendensystem und der Antifilter $\mathfrak{s}''$ aller abgeschlossenen präkompakten Untergruppen von A.

Analog stellen wir dem aus allen offenen Untergruppen von A bestehenden charakteristischen Filter $\mathfrak{S}$ von A gegenüber:

Den Filter $\mathfrak{S}'$ aller abgeschlossenen Untergruppen A' von A mit der Eigenschaft, daß in A/A' alle kompakten Unter*mengen* endlich sind und den Filter aller abgeschlossenen Untergruppen A'' von A mit der Eigenschaft, daß in A/A'' alle kompakten *Untergruppen* endlich sind.

Offenbar ist $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s}''$ und $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}''$.

Definition. Eine Gruppe A heiße „*prädiskret*", wenn der charakteristische Antifilter $\mathfrak{s}$ von A nur aus endlichen Gruppen besteht.

Nun gilt:

(4.1) *Die Gruppe A ist kompakt genau dann, wenn sie 1. präkompakt und 2. vollständig ist.*

Die Gruppe A ist diskret genau dann, wenn sie 1. prädiskret und 2. antivollständig ist.

Der Beweis ist bekannt bzw. trivial.

Offenbar ist die Bedingung (K) äquivalent zu $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}'$, während (L) gleichbedeutend mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ ist. Ferner ist für abzählbarartige Gruppen 1. Art stets $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}''$, während für abzählbarartige Gruppen 2. Art stets $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''$ gilt. Mit Rücksicht auf (2.1) bzw. (2.2) ergibt sich also:

(4.2) *Eine abzählbarartige Gruppe von 1. bzw. 2. Art ist genau dann vollständig bzw. antivollständig (und damit nach (3.1) vollständig und antivollständig), wenn jede abgeschlossene präkompakte Untergruppe kompakt ($\mathfrak{s} = \mathfrak{s}''$) bzw. jede prädiskrete Restklassengruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe diskret ($\mathfrak{S} = \mathfrak{S}''$) ist.*

Bemerkungen. 1. Eine Gruppe A ist bekanntlich (vgl. Sch. I S. 458 und Satz 15) linear kompakt, wenn A vollständig und für jede offene Untergruppe A_α von A die (diskrete) Restklassengruppe A/A_α endlichrangig (vgl. Sch. I Nr. 8) ist. Dies gibt Anlaß zu folgenden zu den vorangegangenen analogen Begriffsbildungen:

A heiße *linear-präkompakt*, wenn für jede offene Untergruppe A_α von A die Restklassengruppe A/A_α endlichrangig ist.

A heiße *linear-prädiskret*, wenn der charakteristische Antifilter von A nur aus endlichrangigen Gruppen besteht.

Dann ist offenbar eine Gruppe linear kompakt genau dann, wenn sie linear-präkompakt und vollständig ist. Dementsprechend definieren wir weiter:

A heiße *linear-diskret*, wenn sie 1. linear-prädiskret, und 2. antivollständig ist.

Man verifiziert leicht, daß die linear-diskreten Gruppen genau die S-topologischen Gruppen aus Sch. I Nr. 5 sind.

Die Definition von „linear-diskret" weicht formal und inhaltlich von der bei H. LEPTIN [*1*, S. 258] gegebenen ab, scheint aber im Hinblick auf die hier entwickelte Systematik der Begriffe „diskret" und „kompakt" die näherliegende und zweckmäßigere zu sein.

2. Nicht beantwortet werden kann hier die Frage, welche Bedeutung die Bedingung $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''$ für abzählbarartige Gruppen 1. Art bzw. die Bedingung $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}''$ für abzählbarartige Gruppen 2. Art hat. Eine vollständige Gruppe 1. Art genügt den Bedingungen (K) und (L), ist nach (3.1) also auch antivollständig und daraus folgt leicht $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}''$, also erst recht $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''$. Ebenso folgt für abzählbarartige Gruppen 2. Art $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}''$ und damit $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}''$ aus der Antivollständigkeit. Ist aber auch umgekehrt für Gruppen 1. Art die Vollständigkeit eine Folge von $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''$ und für Gruppen 2. Art die Antivollständigkeit eine Folge von $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}''$? Eine bejahende Antwort auf diese Fragen würde bedeuten, daß für abzählbarartige Gruppen die Bedingungen der

ständigkeit und Antivollständigkeit äquivalent sind. Denn ist A etwa eine abzählbarartige Gruppe 2. Art, so würde aus der Vollständigkeit von A $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}''$ und damit $\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}''$ und — falls Antivollständigkeit eine Folge von $\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}''$ ist — die Antivollständigkeit von A folgen, während umgekehrt eine antivollständige Gruppe 2. Art, da sie (K) und (L) genügt, nach (3.1) auch stets vollständig ist. Analog für Gruppen 1. Art. — In auch für nicht abzählbarartige Gruppen gültiger Form lassen sich die obigen Fragen wie folgt formulieren:

(F_1) Ist stets

a) die Bedingung (K) äquivalent zu $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}''$?

b) die Bedingung (L) äquivalent zu $\mathfrak{s}'=\mathfrak{s}''$?

oder auch allgemeiner:

(F_2) a) Besitzt jede nichtkompakte Gruppe unendliche prädiskrete Restklassengruppen?

b) Enthält jede nichtdiskrete Gruppe unendliche präkompakte Untergruppen?

5. Die in den vorangegangenen Nummern herausgearbeitete Dualität der Eigenschaften (K) und (L) (bzw. von Vollständigkeit und Antivollständigkeit) für abzählbarartige Gruppen findet ihren Ausdruck gleichfalls in der Theorie der Charakterengruppen dieser Gruppen:

Sei A eine abzählbarartige Gruppe, $C[A]$ ihre — wie üblich gebildete — Charakterengruppe. Dann lautet der angekündigte Satz:

(5.1) *a) Die Bedingung* (K) *ist für A genau dann erfüllt, wenn gilt:*

(K$^+$) *Ist C_B eine offene Untergruppe von $C[A]$, dann gibt es eine kompakte Untergruppe B von A, deren Annullator C_B ist. Oder anders gesagt: Die Annullatoren der kompakten Untergruppen von A bilden den ganzen charakteristischen Filter von $C[A]$.*

b) Die Bedingung (L) *ist für A genau dann erfüllt, wenn gilt:*

(L$^+$) *Ist C^B eine kompakte Untergruppe von $C[A]$, dann gibt es eine offene Untergruppe B von A, welche von C^B annulliert wird. Oder anders gesagt: Diejenigen abgeschlossenen Untergruppen von $C[A]$, welche offene Untergruppen von A annullieren, bilden den ganzen charakteristischen Antifilter von $C[A]$.*

Dem Beweis von (5.1) schicken wir voran den folgenden Hilfssatz:

(5.2) *Sei $\mathring{C}[A]$ die nicht topologisierte Charakterengruppe von A, aufgefaßt als Operatorgruppe mit dem Ring der ganz-p-adischen Zahlen als Operatorenbereich* (vgl. Sch. II Nr. 2), *$\mathring{C}^B$ eine (operatorzulässige) Untergruppe von $\mathring{C}[A]$, B die volle von $\mathring{C}^B$ annullierte Untergruppe von A, $\mathring{C}_B \subseteq \mathring{C}[A]$ der Annullator von B. Ist dann $\mathring{C}_D$ der Annullator einer Untergruppe D von A und ist $\mathring{C}_D \cap \mathring{C}^B$ von endlichem Index in $\mathring{C}^B$, dann ist $\mathring{C}_D \cap \mathring{C}_B$ von endlichem Index in $\mathring{C}_B$.*

Beweis. Indem wir uns von vornherein Restklassengruppenbildung von A nach B vorgenommen denken, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B=0$ $\mathring{C}_D \subseteq \mathring{C}_B = C[A]$ voraussetzen und hinfort $\mathring{C}^B$ mit $\mathring{C}^0$ be-

zeichnen. $\mathring{C}^{D'} = \mathring{C}_D \cap \mathring{C}^0$ ist von endlichem Index in $\mathring{C}^0$; $D' \subseteq A$ sei die volle von $\mathring{C}^{D'}$ annullierte Untergruppe von A, $\mathring{C}_{D'}$ der Annullator von D'. Offenbar ist $D' \supseteq D$, $\mathring{C}_{D'} \subseteq \mathring{C}_D$, $\mathring{C}_{D'} \supseteq \mathring{C}^{D'}$, $\mathring{C}_{D'} \cap \mathring{C}^0 = \mathring{C}^{D'}$. Die Restklassengruppe $\mathring{C}' = \mathring{C}[A]/\mathring{C}_{D'}$ ist zu identifizieren mit der Charakterengruppe von D'; die den Gruppen $\mathring{C}^0$, $\mathring{C}_D$ bei der Restklassengruppenbildung entsprechenden Gruppen seien $\mathring{C}^{0\prime}$, $\mathring{C}'_D$. $\mathring{C}^{0\prime}$ ist endlich und die volle von $\mathring{C}^{0\prime}$ annullierte Untergruppe von D' ist die Nullgruppe, d.h. D' und damit D sind endlich. Daraus ergibt sich, daß der Index von $\mathring{C}_D$ in $C[A]$ endlich ist — woraus die Behauptung von (5.2) folgt.

Beweis von (5.1). a) Wurde bereits in Sch. II Satz 3 bewiesen. b) Erstens: Sei (L) für A erfüllt, C^B eine kompakte Untergruppe von $C[A]$, B die größte von C^B annullierte Untergruppe von A, $C_B \subseteq C[A]$ der Annullator von B. Nach dem Hilfssatz (5.2) und wegen (3.2) ist C_B kompakt und es ist leicht zu sehen, daß C_B mit der Charakterengruppe $C[A/B]$ von A/B identifiziert werden kann. Wegen der Kompaktheit von $C[A/B]$ ist in A/B jede kompakte Untermenge endlich und mithin wegen (L) B offen in A, woraus (L^+) folgt.

Zweitens: Sei (L^+) erfüllt, B eine abgeschlossene Untergruppe von A derart, daß in A/B jede kompakte Untermenge endlich ist. C_B sei der Annullator von B. Dann kann wieder C_B mit der Charakterengruppe $C[A/B]$ identifiziert werden, und es ist klar, daß C_B kompakt sein muß. Da B die volle von C_B annullierte Untergruppe von A ist, folgt wegen (L^+) die Offenheit von B in A.

Schlußbemerkungen. Einige der in den vorangegangenen Nummern für abzählbarartige Gruppen bewiesenen Sätze bleiben auch für nicht abzählbarartige Gruppen richtig. So z.B. die Äquivalenz der gemeinsamen Gültigkeit der Bedingungen (K) und (L) einerseits und der Gültigkeit des Dualitätssatzes andererseits [(3.1) (1) und (3)], ebenso die Gleichwertigkeit von (K) und (K^+) sowie die von (L) und (L^+) [(5.1)]. Im allgemeinen *nicht* richtig sind hingegen für nicht abzählbarartige Gruppen z.B. die Sätze (2.3) — (L) ist zwar stets eine Folge von (K_2), nicht aber umgekehrt — (3.1) und (3.2). Insbesondere folgt aus Vollständigkeit bzw. Antivollständigkeit zwar auch im nicht abzählbarartigen Falle stets (K) bzw. (L), aber auch aus (K) und (L) zusammen braucht nicht notwendig Vollständigkeit bzw. Antivollständigkeit zu folgen [vgl. (3.1) (1) und (4)]. Trotzdem behalten die Begriffe der Vollständigkeit und Antivollständigkeit auch für nicht abzählbarartige Gruppen ihren Sinn und ihre (duale) Bedeutung, wie schon der folgende Satz zeigt:

Ist A eine (nicht notwendig abzählbarartige) dem Dualitätssatz genügende Gruppe, so ist A (über (L) *hinaus) sogar antivollständig bzw. (über* (K) *hinaus) sogar vollständig genau dann, wenn die Charakterengruppe $C[A]$ vollständig bzw. antivollständig ist.*

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden Bemerkungen: Ist A antivollständig, so folgt: Ist f eine Abbildung von A in die Gruppe vom Typus p^∞,

so daß für jede kompakte Untergruppe K von A die von f auf K induzierte Abbildung f_K ein topologischer (d.h. stetiger und offener) Homomorphismus von K ist, dann ist f ein topologischer Homomorphismus von A und hieraus ergibt sich nach einem Satz von KRULL (Sch. II Anm. 3) sofort die Vollständigkeit von $C[A]$. — Sei nun umgekehrt A nicht antivollständig. Dann existiert eine nicht offene Untergruppe $B' \leqq A$ derart, daß für jede kompakte Untergruppe $K \leqq A$ der Durchschnitt $B' \cap K$ offen in K ist. Unter Zuhilfenahme des Dualitätssatzes sieht man leicht, daß B' nicht abgeschlossen in A sein kann (betrachte andernfalls die Restklassengruppe A/B' und beachte, daß die Charakterengruppe von A/B' kompakt wird). Dann gibt es sicher eine in A nicht abgeschlossene Obergruppe B von B', für welche die (gewöhnliche Operator-)Restklassengruppe A/B entweder endlich zyklisch oder vom Typus p^∞ ist, und für welche natürlich $B \cap K$ für jede kompakte Untergruppe K von A offen in K ist. Sei f eine (sicherlich existierende) homomorphe Abbildung von A in die Gruppe vom Typus p^∞ mit dem Kern B. Der von f induzierte Homomorphismus f_K von K ist für jede kompakte Untergruppe K von A ein topologischer Homomorphismus. Sei U_K die Menge aller Charaktere von A, welche für K mit der Abbildung f_K identisch sind. U_K ist dann eine Nebenschar der offenen Untergruppe von $C[A]$, welche Annullator von K ist. Durchläuft K alle kompakten Untergruppen von A, so bilden die entsprechenden U_K einen Cauchyfilter F in $C[A]$. Besäße F einen nichtleeren Durchschnitt, so wäre dieser mit der Abbildung f von A identisch. Aber da der Kern B von f nicht abgeschlossen und f mithin kein Charakter von A ist, muß der Durchschnitt der U_K leer sein und $C[A]$ ist nicht vollständig. Mithin ist die Vollständigkeit von $C[A]$ [unter den für A gemachten Voraussetzungen (K) und (L)] gleichbedeutend mit der Antivollständigkeit von A. — Die duale Behauptung, nach welcher die Vollständigkeit von A äquivalent zur Antivollständigkeit von $C[A]$ ist, läßt sich entsprechend beweisen, folgt aber auch bereits aus dem Dualitätssatz auf Grund der Bemerkung, daß A Charakterengruppe von $C[A]$ ist.

Literatur

[1] LEPTIN, H.: Abelsche Gruppen mit kompakten Charaktergruppen und Dualitätstheorie gewisser linear-topologischer Abelscher Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 244—263 (1954). — [2] LEPTIN, H.: Zur Dualitätstheorie projektiver Limites Abelscher Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 264—268 (1954). — [3] SCHÖNEBORN, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen I. Math. Z. **59**, 455—473 (1954). — [4] SCHÖNEBORN, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen II. Math. Z. **60**, 17—30 (1954).

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. Februar 1956)

RAMANUJAN, M. S.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 442—447 (1956)

Theorems on the product of quasi-Hausdorff and Abel transforms

By

M. S. RAMANUJAN

1. INTRODUCTION. O. SZÁSZ [5] raised the following question about the "product" of two summability methods for sequences: If a sequence $\{s_n\}$ is summable by a regular method A then is the B-transform of $\{s_n\}$, where B is a regular sequence-to-sequence method, also summable by the method A to the same sum as before? The question was finally answered in the affirmative by SZÁSZ [6] himself and PATI [2] in the case when i) A is the Abel method and B is a regular sequence-to-sequence Hausdorff transform (in particular the Cesàro or the Euler transform [5]) and by SZÁSZ [6] when ii) A is the Borel Exponential method and B is a regular Hausdorff method and iii) when A is Abel method and B the Hardy-Littlewood-Fekete circle method which is essentially a sequence-to-sequence method ([1], § 9.11). RAJAGOPAL ([3], Theorem I) has extended the results i) and ii) to the case when A is a suitably restricted power series method, known to include the Abel and Borel methods and B is a regular Hausdorff method. I propose now to extend iii) to a transform B, which is a regular quasi-Hausdorff transform known to include the circle method ([1], §§ 11.20, 11.21 (1)) as a particular case. My extension which appears as Theorem 2 of this paper, has an analogue when A, B are series-to-series transformations. This analogue, Theorem 1, is given first as being perhaps the more interesting of the two theorems.

2. NOTATIONS AND LEMMAS. A transformation which converts a series $\sum_n a_n$ to a series $\sum_n b_n$ is said to be *quasi-Hausdorff* when $\{b_n\}$ is defined by

$$(H_1^*, \mu) \quad b_n = \sum_\varkappa \lambda_{n\varkappa}^* a_\varkappa$$

where

$$(1) \qquad \lambda_{n\varkappa}^* = 0 \quad (\varkappa < n), \qquad \lambda_{n\varkappa}^* = \binom{\varkappa}{n} \Delta^{\varkappa - n} \mu_n \quad (\varkappa \geq n).$$

The quasi-Hausdorff series-to-series transformation is a special case of the transformation of $\sum a_n$ to $\sum b_n$ where,

$$(2) \qquad b_n = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} h_{n\varkappa} a_\varkappa.$$

If the transformation given by (2) is regular i.e. limit preserving, then the matrix of transformation H is said to be an *α-matrix*. Following VERMES [7], we define an α-matrix each of whose rows has the limit 0, i.e. $\lim_{\varkappa \to \infty} h_{n\varkappa} = 0$ for each n, as an *α_0-matrix*.

On the other hand, a quasi-Hausdorff transformation which converts a sequence s_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ to a sequence t_n $(n=0, 1, \ldots)$ is defined by ([1], § 11.19)

$$(H_2^*, \mu) \quad t_n = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \lambda_{n\varkappa}^* s_\varkappa$$

where $\lambda_{n\varkappa}^*$ is given in terms of μ_n as before.

If in either case, μ_n is a *moment constant of rank n*, generated by a function $\chi(u)$ which is real and of bounded variation for $0 \leq u \leq 1$, we have

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \cdot d\chi(u) \tag{3}$$

and we may suppose without loss of generality that $\chi(0)=0$. If in addition,

$$\chi(1)=1 \quad \text{and} \quad \chi(+0)=\chi(0)=0 \tag{4}$$

then μ_n is called a *regular moment constant.*

In the proofs of the theorems, I require the following lemmas.

Lemma 1. *The series-to-series quasi-Hausdorff transformation* (H_1^*, μ) *is regular if, and only if,*

i) μ_n *is a moment constant, i.e. given by* (3) *and* ii) $\mu_0=1$ *i.e.* $\int_0^1 d\chi=1$.

This result has been proved by me elsewhere ([4], Theorem II). Now, since in a quasi-Hausdorff matrix, each row tends to 0 if, and only if, each column of the corresponding Hausdorff matrix tends to 0 which happens if and only if, $\chi(+0)=0$, we have, after Lemma 1,

Lemma 2. *The quasi-Hausdorff matrix* (H_1^*, μ) *is an* α_0*-matrix if, and only if* μ_n *is a regular moment constant.*

Lemma 3. *Given an* α_0*-matrix H defining a transformation of the series* $\sum_n a_n$ *to the series* $\sum_n b_n$, *there exists a T-matrix B defined by*

$$b_{n\varkappa}=g_{n\varkappa}-g_{n\cdot\varkappa+1} \quad \textit{where} \quad g_{n\varkappa}=h_{0\varkappa}+h_{1\varkappa}+\cdots+h_{n\varkappa} \tag{5}$$

which transforms the sequence $\{s_n\}$ *of partial sums of* $\sum a_n$ *into the sequence* $\{t_n\}$ *of partial sums of* $\sum b_n$ *and conversely.*

This has been proved by Vermes ([7], Theorem 3. III).

Lemma 4. *If* μ_n *is a moment constant given by* (3), *then the sequence-to-sequence transformation* (H_2^*, μ) *is regular if, and only if,*

$$\int_0^1 \frac{|d\chi(u)|}{u} < \infty, \quad \textit{and} \quad \int_0^1 \frac{d\chi(u)}{u} = 1.$$

Lemma 4 is given by Hardy ([1], Theorem 219) with the additional assumption of regularity of μ_n. This additional assumption is seen to be superfluous in Hardy's proof of Lemma 4 and it is in fact not fulfilled in the case of the circle method regarded as a particular case of (H_2^*, μ) summability ([1], § 11.21 (1)).

3. THEOREMS.

THEOREM 1. *Let* $\sum_{0}^{\infty} a_n$ *be any series belonging to the class* $\mathfrak{B}$ *of series with bounded partial sums. If* $\sum a_n$ *is summable to* l *by Abel's method, then the transform* $\sum b_n$ *of the series given by any quasi-Hausdorff* α_0*-matrix is also summable to* l *by Abel's method.*

PROOF. In our present transformation (H_1^*, μ), λ_{nk}^* is defined by (1) and μ_n by (3) and (4), since the matrix of transformation is assumed to be an α_0-matrix and so satisfies the conditions of Lemma 2. Now,

$$b_n = \sum_{\varkappa} \lambda_{n\varkappa}^* a_\varkappa$$

and the matrix $\|\lambda^*\|$ is an α_0-matrix. Therefore by Lemma 3, there exists a T-matrix B corresponding to this and defined by (5). It is easily seen, as in the course of the proof of Theorem II of [4], that the T-matrix B corresponding to $\|\lambda^*\|$ is given by the equation

$$b_{n\varkappa} = \binom{\varkappa}{n} \Delta^{\varkappa-n} \mu_{n+1}.$$

Therefore we have now that if $\{s_n\}$ and $\{t_n\}$ are the sequences of partial sums of $\sum a_n$ and $\sum b_n$ respectively,

$$t_n = \sum_{\varkappa \geq n} \binom{\varkappa}{n} \Delta^{\varkappa-n} \mu_{n+1} s_\varkappa. \tag{6}$$

But, since μ_n is given by (3),

$$t_n = \sum_{\varkappa \geq n} \int_0^1 s_\varkappa \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} u^{n+1} \, d\chi(u).$$

We have, consequently

$$\sum_n t_n x^n = \sum_n x^n \sum_{\varkappa \geq n} \int_0^1 s_\varkappa \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} u^{n+1} \cdot d\chi(u) \tag{7}$$

provided the right-hand member exists. To prove this existence, consider the right-hand member with $s_\varkappa$ replaced by $|s_\varkappa|$ and $\chi(u)$, supposed to be monotonic increasing (as is permissible). The right-hand member with these changes, is

$$\begin{aligned}
&\sum_n x^n \sum_{\varkappa \geq n} \int_0^1 |s_\varkappa| \cdot \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} u^{n+1} \, d\chi(u) \\
&= \sum_n x^n \int_0^1 \sum_{\varkappa \geq n} |s_\varkappa| \cdot \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} u^{n+1} \, d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \sum_n x^n \sum_{\varkappa \geq n} |s_\varkappa| \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} u^{n+1} \, d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \sum_{\varkappa=0}^{\infty} |s_\varkappa| \sum_{n=0}^{k} \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} \cdot x^n \cdot u^{n+1} \cdot d\chi(u) \\
&= \int_0^1 \sum_\varkappa |s_\varkappa| (1-u+xu)^\varkappa \cdot u \cdot d\chi(u)
\end{aligned}$$

every inversion of operation being justified by the fact that we have only positive integrands or terms. The last integral is finite on account of the boundedness of $\{s_n\}$ and since the function $\chi(u)$ satisfies the conditions of Lemma 2.

Hence, we get from (7)

$$\sum t_n x^n = \int_0^1 \sum_\varkappa s_\varkappa (1-u+xu)^\varkappa \cdot u \cdot d\chi(u). \tag{8}$$

Put now

$$f(x) = \sum_n s_n x^n \quad \text{and} \quad F(x) = \sum_n t_n x^n.$$

Substituting $x = 1 - \frac{1}{y}$, we have

$$g(y) = f\left(1-\frac{1}{y}\right) = f(x) \quad \text{and} \quad G(y) = F\left(1-\frac{1}{y}\right) = F(x)$$

and

$$(1-x) f(x) \to l \quad \text{as} \quad x \to 1-0$$

or

$$\frac{1}{y} \cdot g(y) \to l \quad \text{as} \quad y \to \infty.$$

Also from equation (8) above, we have,

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_0^1 f(1-u+xu) \cdot u \cdot d\chi(u) \\ &= \int_0^1 u \cdot f\left(1-\frac{u}{y}\right) d\chi(u) \\ &= \int_0^1 u \cdot g\left(\frac{y}{u}\right) d\chi(u) \end{aligned}$$

and

$$\frac{G(y)}{y} = \int_0^1 \frac{u}{y} \cdot g\left(\frac{y}{u}\right) d\chi(u).$$

Since $\frac{g(y)}{y} \to l$ as $y \to \infty$, the same is true of $\frac{g\left(\frac{y}{u}\right)}{\frac{y}{u}}$ also, since, for $0 \leqq u \leqq 1$, $\frac{y}{u} \geqq y$.

Therefore, by Lebesgue's theorem on dominated convergence, $\frac{G(y)}{y} \to l$ as $y \to \infty$, since, by Lemma 2, $\chi(u)$ satisfies the conditions (4), i.e. $\sum b_n$ is Abel summable to l and this completes the proof of the theorem.

REMARK 1. In the special case when

$$\chi(u) = 0, \quad 0 \leqq u < a, \quad \chi(u) = 1, \quad a \leqq u \leqq 1, \qquad \text{so that } \mu_n = a^n$$

which will give the circle method of summation, regarded as a series-to-series transformation, the right-hand members of (7) and (8) become respectively,

$$\sum_n x^n \sum_{\varkappa \geqq n} \binom{\varkappa}{n} (1-a)^{\varkappa - n} a^{n+1} s_\varkappa \tag{7}'$$

and

$$(8)' \qquad \sum_{\varkappa} s_{\varkappa}(1-a+xa)^{\varkappa}\cdot a.$$

Now, on account of the absolute convergence of the series in (8)', ensured by the Abel summability of $\{s_n\}$, we can effect the interchange of order of summation in the steps between (7) and (8) and establish the equality of (7)' and (8)' irrespective of whether $\{s_n\}$ is bounded or not. Thus in the special case of the circle method $\sum_n t_n x^n$ exists as the series in (8)' or alternatively as the integral in (8). Hence the proof of Szász's theorem is contained in that of Theorem 1.

REMARK 2. The need for the restriction $s_n = O(1)$ becomes evident when we consider the series $\sum_n a_n$, $a_n \equiv 1$ and its transformation $\sum b_n$, where

$$b_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \cdots$$

which does not exist.

Even the slightly weaker assumption that the radius of convergence of $\sum a_n x^n$ is unity will not suffice for the existence of $\{b_n\}$ is evident from the above example.

REMARK 3. Another restriction in Theorem 1 is that the transformation is by an α_0-matrix, which is stronger than assuming that it is by an α-matrix. It might however be noted that, in case it is not by an α_0-matrix, the existence of an equivalent T-matrix is not ensured, and therefore we cannot proceed to equation (6) and thence to (7). In fact we have then, instead of the right-hand member of (7) the double series

$$\sum_n x^n \sum_{\varkappa \geq n} a_{\varkappa} \int_0^1 \binom{\varkappa}{n} (1-u)^{\varkappa-n} u^n \, d\chi(u)$$

which need not be absolutely convergent, even if $s_n = O(1)$ as seen from the example $a_n = (-1)^n$ and $\chi(u) = u$, kindly supplied to me by the referee.

THEOREM 2. *Let s_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ be a bounded sequence summable to l by Abel's method. Then a regular transform t_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ of s_n by the method (H_2^*, μ) with moment constants μ_n, is also summable to l by Abel's method.*

PROOF. We proceed as in the proof of Theorem 1 and obtain instead of (8)

$$(1-x)\sum_n t_n x^n = (1-x)\int_0^1 \sum_{\varkappa} s_{\varkappa}(1-u+xu)^{\varkappa}\cdot d\chi(u)$$

where the series on the left is convergent (absolutely) for $0 < x \leq 1$ the series on the right, under the integral sign, being so. Appealing now to Lemma 4, exactly as we did formerly to Lemma 2, we see that the conclusion

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)\sum t_n x^n = l$$

follows from the hypothesis

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)\sum s_n x^n = l.$$

A special case of the transformation (H_2^*, μ) is the following transformation

$$C_1^* \quad t_n = (n+1)\left[\frac{s_n}{(n-1)(n+2)} + \frac{s_{n+1}}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right]$$

where $\mu_n = (n-2)^{-1}$ and so $\chi(u) = \frac{u^2}{2}$, known to be equivalent to the $(C, 1)$ transformation of a sequence ([1], § 11.21 (3)).

In conclusion, I wish to thank Professors C. T. RAJAGOPAL and V. GANAPATHY IYER for their helpful guidance.

References

[1] HARDY, G. H.: Divergent Series. Oxford 1949. — [2] PATI, T.: Products of Summability Methods. Proc. Nat. Inst. Sci. Ind. **20**, 348—351 (1954). — [3] RAJAGOPAL, C. T.: Theorems on the Product of Two Summability Methods with Applications. J. Ind. Math. Soc. (New Series) **18**, 89—105 (1954). — [4] RAMANUJAN, M. S.: Series-to-series Quasi-Hausdorff Transformations. J. Ind. Math. Soc. (New Series) **17**, 47—53 (1953). — [5] SZASZ, O.: On Products of Summability Methods. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 257—263 (1952). — [6] SZASZ, O.: On the Product of Two Summability Methods. Ann. Soc. Polon. Math. **25**, 75—84 (1952/53). — [7] VERMES, P.: Conservative Series-to-series Transformation Matrices. Acta Sci. Math. Szeged. **15**, 23—38 (1951).

Ramanujan Institute of Mathematics, Madras (India)

(Eingegangen am 25. Februar 1956)

Bauer, H.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 448—482 (1956)

Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Maße*)

Von
Heinz Bauer

Einleitung

Neben die abstrakte Integrationstheorie von Stone [21], welche die klassische Lebesguesche Theorie zum Vorbild hat, ist neuerdings eine abstrakte Theorie des Riemann-Integrals von Loomis [14] getreten. „Abstrakt" heißt hierbei, daß auf eine Topologie im Definitionsbereich der zu integrierenden Funktionen kein Bezug genommen wird. Ausgangspunkt der Untersuchungen von Loomis ist vielmehr, ähnlich wie bei Stone, ein positives, lineares Funktional I über einem System $\mathfrak{R}$ reeller Funktionen, deren gemeinsamer Definitionsbereich eine Menge E ist; hierbei wird $\mathfrak{R}$ als Vektorverband angenommen, welcher als Ersatz für die eventuell fehlende Konstante 1 mit jeder Funktion g auch $\min(1, g)$ enthält. Im Gegensatz zur Stoneschen Theorie wird die Stetigkeit des Funktionals I nicht gefordert. Ziel ist, wie bei allen Untersuchungen dieser Art, durch Einführung einer geeigneten additiven Mengenfunktion $\mu \mid \mathfrak{Q}$ und Definition eines μ-Unterteilungsintegrals eine Darstellung von $I(f)$ als μ-Integral für eine möglichst umfassende Klasse von Funktionen $f \in \mathfrak{R}$ zu finden. Die fehlende Stetigkeit von I führt hierbei zu einem neuen Gesichtspunkt; es wird nämlich ein gewisses Prinzip der Sparsamkeit bei der Bestimmung der μ-meßbaren Mengen verfolgt. Bei Loomis ist $\mathfrak{Q}$ das System aller Teilmengen Q von E, deren charakteristische Funktionen von oben und unten her durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ beliebig genau I-einschließbar sind; die charakteristische Funktion χ_Q einer Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ erhält dann bei jeder möglichen Fortsetzung von I zu einem positiven, linearen Funktional über einem χ_Q als Element enthaltenden Vektorraum von reellen Funktionen auf E den gleichen Funktionalwert, nämlich $\mu(Q)$ zugeordnet. Mit Hilfe von $\mu \mid \mathfrak{Q}$ gewinnt Loomis das Integral $\int f \, d\mu$ durch Bildung von Ober- und Untersummen nach dem Vorbild des klassischen Riemann-Integrals.

Wendet man die Loomissche Theorie speziell auf den „konkreten" Fall eines lokal kompakten Raumes E an und wählt man für $\mathfrak{R}$ die Menge $\mathfrak{K}(E)$ der auf E stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, so ist I ein Radonsches Maß ϱ auf E. Es zeigt sich, daß in diesem Falle $\mathfrak{Q}$ das System der ϱ-quadrierbaren Mengen ist, d.h. der relativ kompakten Teilmengen von E, deren Begrenzung eine ϱ-Nullmenge ist. Ferner erweist sich das System der bezüglich I im Sinne von Loomis Riemann-integrierbaren Funktionen als das System aller ϱ-fast überall stetigen Funktionen auf E mit kompaktem

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen als Habilitationsschrift angenommen.

Träger. Man gewinnt auf diese Weise aus der Theorie von Loomis die von HAUPT und PAUC [10], [19], [12b], S. 174ff., entwickelte Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist gewissermaßen die Umkehrung dieser Feststellung. Zunächst läßt sich zeigen, daß es für die Loomissche Theorie keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ als beschränkt vorauszusetzen und anzunehmen, daß je zwei verschiedene Elemente von E durch eine Funktion aus $\mathfrak{R}$ getrennt werden können und in jedem Element von E mindestens eine Funktion aus $\mathfrak{R}$ nicht verschwindet. Unter diesen zusätzlichen Annahmen über E und $\mathfrak{R}$ wird dann die Existenz eines durch E und $\mathfrak{R}$ im wesentlichen eindeutig bestimmten, lokal kompakten Raumes $E'_{\mathfrak{R}}$ nachgewiesen, der E als dichte Teilmenge enthält und folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem positiven, linearen Funktional $I \mid \mathfrak{R}$ existiert ein eindeutig bestimmtes, positives Radonsches Maß ϱ' auf $E'_{\mathfrak{R}}$ derart, daß das Mengensystem $\mathfrak{Q}$ genau die Spur des Systems der ϱ'-quadrierbaren Teilmengen von $E'_{\mathfrak{R}}$ und ferner das System der bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen $f \mid E$ gleich dem System der auf E verengerten, ϱ'-fast überall stetigen Funktionen $f' \mid E'_{\mathfrak{R}}$ mit kompaktem Träger ist. Für jede ϱ'-quadrierbare Menge Q' und deren Spur Q in E ist $\mu(Q) = \varrho'(Q')$; für jede ϱ'-fast überall stetige Funktion $f' \mid E'_{\mathfrak{R}}$ mit kompaktem Träger und deren Verengerung $f \mid E$ ist $\int f \, d\mu = \int f' \, d\varrho'$.

Durch diesen Darstellungssatz für die nach Loomis Riemann-integrierbaren Funktionen wird das nicht notwendig stetige Funktional I mit dem Radonschen Maß ϱ', also einem stetigen Funktional über dem Vektorraum $\mathfrak{K}(E'_{\mathfrak{R}})$ der auf $E'_{\mathfrak{R}}$ stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Beziehung gesetzt. Der Klärung des hier vorliegenden Sachverhalts dient eine Bemessung des Stetigkeitsdefektes von I durch die Zerlegung von I in seinen sog. stetigen Teil I_c und rein-unstetigen Teil I_p. Da aus der Stoneschen Theorie die Existenz einer Integraldarstellung für den stetigen Teil I_c folgt, lassen sich mit Hilfe dieser Zerlegung Bedingungen herleiten, unter welchen für eine vorgegebene Funktion $f \in \mathfrak{R}$ der Funktionalwert $I(f)$ als Integral darstellbar ist. Hierdurch erscheinen bekannte Sätze über Integraldarstellungen in neuem Lichte.

Die Arbeit gliedert sich in vier Paragraphen. § 1 gibt einen kurzen Überblick über die Theorie von Loomis und ergänzt sie durch einige auf unser Ziel ausgerichtete Bemerkungen. § 2 enthält einen Beweis für die Existenz der Zerlegung $I = I_c + I_p$ und bringt diese in Zusammenhang mit den Begriffsbildungen der Loomisschen Theorie. Insbesondere wird gezeigt, daß der Zerlegung von I die Zerlegung von μ in σ-additiven und rein-endlich-additiven Teil entspricht. In § 3 wird die Loomissche Theorie auf den konkreten Fall eines lokal kompakten Raumes angewandt als Vorstufe für den Beweis des Darstellungssatzes, der dann in § 4 erbracht wird. In einem Beispiel am Schluß der Arbeit wird die Stonesche Kompaktifizierung einer Booleschen Mengenalgebra als Raum $E'_{\mathfrak{R}}$ gedeutet[1]).

[1]) Eine Vorankündigung der wichtigsten Resultate dieser Arbeit (ohne Beweise) findet sich in [7].

§ 1. Riemann-Integrierbarkeit bezüglich eines linearen Funktionals. Abstrakter Fall[2])

1.1. Es sei E eine Menge beliebiger Elemente $x, y, \ldots$ und $\mathfrak{R}$ eine Menge reeller, endlicher, auf E definierter Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(1) *sind* $g, h \in \mathfrak{R}$ *und* α, β *reelle Zahlen, so ist* $\alpha g + \beta h \in \mathfrak{R}$;

(2) *ist* $g \in \mathfrak{R}$, *so ist* $|g| \in \mathfrak{R}$;

(3) *ist* $g \in \mathfrak{R}$, *so ist* $\min(1, g) \in \mathfrak{R}$[3]).

Zufolge (1) und (2) ist $\mathfrak{R}$ ein Vektorverband reeller Funktionen über dem Körper P der reellen Zahlen; insbesondere liegen mit je endlich vielen Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ auch die Funktionen $\max(g_1, \ldots, g_n)$ und $\min(g_1, \ldots, g_n)$ in $\mathfrak{R}$. Zufolge (1) bis (3) liegt $\min(\alpha, g)$ in $\mathfrak{R}$ für jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ und jede reelle Zahl $\alpha \geqq 0$.

An anderer Stelle [*17*] haben NÖBELING und Verf. kennzeichnende Eigenschaften derjenigen beschränkten, reellen Funktionen auf E angegeben, welche durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden können. Wir entnehmen dieser Arbeit das folgende für uns wichtige Resultat[4]).

Lemma 1. *Die Menge* $\mathfrak{A}$ *aller beschränkten, reellen, auf* E *definierten Funktionen, die durch Funktionen aus* $\mathfrak{R}$ *gleichmäßig approximiert werden können, ist eine Algebra*[5]). *Zu jeder Funktion* $f \in \mathfrak{A}$ *existiert eine gegen* f *auf* E *gleichmäßig konvergente Folge* $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *von (beschränkten) Funktionen aus* $\mathfrak{R}$ *mit folgender Eigenschaft:*

$$(4)\quad \begin{cases} 0 \leqq g_1(x) \leqq g_2(x) \leqq \cdots \leqq f(x) & \text{für jedes } x \in E \text{ mit } f(x) \geqq 0; \\ 0 \geqq g_1(x) \geqq g_2(x) \geqq \cdots \geqq f(x) & \text{für jedes } x \in E \text{ mit } f(x) \leqq 0. \end{cases}$$

1.2. Neben E und $\mathfrak{R}$ sei gegeben ein auf $\mathfrak{R}$ definiertes, reelles, *positives*, lineares Funktional I.

Als (zweiseitige) *Vervollständigung* $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{V}(\mathfrak{R}, I)$ von $\mathfrak{R}$ bezüglich I bezeichnen wir die Menge aller reellen Funktionen $f|E$, zu welchen bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ existieren mit

$$g \leqq f \leqq h \quad \text{und} \quad I(h - g) \leqq \varepsilon\ ^{6}).$$

Dann besitzt $\overline{\mathfrak{R}}$ die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$.

---

[2]) Die in den Nummern 1.2 bis 1.6 dieses Paragraphen erwähnten Begriffsbildungen finden sich bei LOOMIS [*14*].

[3]) Ist $F(u_1, \ldots, u_n)$ eine reelle Funktion in n reellen Variablen $u_1, \ldots, u_n$ und sind $g_1, \ldots, g_n$ auf E definierte, reelle Funktionen, so bezeichnet $F(g_1, \ldots, g_n)$ die durch die Zuordnung $x \to F(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ auf E definierte Funktion. Es gilt also z. B. $|g|(x) = |g(x)|$ für alle $x \in E$.

[4]) Da sich die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ auf die Menge $\mathfrak{R}^*$ aller beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{R}$ übertragen, folgt dies aus der Bemerkung zum Korollar des Kriteriums 2 und dem Satz 1 der zitierten Arbeit [*17*], S. 58 und 59.

[5]) Für je zwei Funktionen $f_1, f_2 \in \mathfrak{A}$ liegt also jede Linearkombination $\alpha f_1 + \beta f_2$ ($\alpha, \beta \in \mathsf{P}$) und das Produkt $f_1 \cdot f_2$ in $\mathfrak{A}$. Darüber hinaus besitzt $\mathfrak{A}$ auch die Eigenschaften (2) und (3) von $\mathfrak{R}$.

[6]) Wir schreiben $g \leqq f \leqq h$ für „$g(x) \leqq f(x) \leqq h(x)$ für alle $x \in E$".

Vermöge der Definition von $\overline{\mathfrak{R}}$ kann das Funktional I *auf genau eine Weise* zu einem positiven, linearen Funktional $\bar{I}\,|\,\overline{\mathfrak{R}}$ fortgesetzt werden. Für ein beliebiges $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ gilt

$$\bar{I}(f) = \sup\big(I(g);\, g \leq f,\, g \in \mathfrak{R}\big) = \inf\big(I(h);\, h \geq f,\, h \in \mathfrak{R}\big). \tag{5}$$

$\overline{\mathfrak{R}}$ ist vollständig im Sinne der Gleichung $\mathfrak{V}(\overline{\mathfrak{R}}, \bar{I}) = \overline{\mathfrak{R}}$. Wir bezeichnen daher $\bar{I}\,|\,\overline{\mathfrak{R}}$ als die Vervollständigung des Funktionals $I\,|\,\mathfrak{R}$.

1.3. Für eine Teilmenge A von E bezeichne χ_A die charakteristische Funktion von A bezüglich der Grundmenge E. Eine Teilmenge Q von E heißt *quadrierbar* bezüglich I (kurz (I-)quadrierbar), wenn ihre charakteristische Funktion χ_Q ein Element von $\overline{\mathfrak{R}}$ ist. Das System aller I-quadrierbaren Mengen werde mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I)$ bezeichnet; definitionsgemäß ist $\mathfrak{Q}(\overline{\mathfrak{R}}, \bar{I}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I)$. Aus den Eigenschaften (1) bis (3) von $\overline{\mathfrak{R}}$ (mit $\overline{\mathfrak{R}}$ an Stelle von $\mathfrak{R}$) folgt, daß $\mathfrak{Q}$ ein Boolescher Mengenverband ist, welcher im allgemeinen keine Einheit besitzt. Ist jedoch die auf E konstante Funktion $f = 1$ ein Element von $\mathfrak{R}$, so gilt $E \in \mathfrak{Q}$.

Die durch die Gleichung

$$\mu(Q) = \bar{I}(\chi_Q) \qquad (Q \in \mathfrak{Q}) \tag{6}$$

auf $\mathfrak{Q}$ definierte, reelle, endliche Mengenfunktion μ ist ein *vollständiger Inhalt*, d.h. μ $\mathfrak{Q}$ ist (endlich-)additiv und nicht negativ und es gilt $M \in \mathfrak{Q}$ für eine Menge $M \subseteq E$, wenn zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Mengen $P, Q \in \mathfrak{Q}$ mit $P \subseteq M \subseteq Q$ und $\mu(Q - P) \leq \varepsilon$ existieren.

1.4. Mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen I-quadrierbarer Mengen. Es besteht also $\mathfrak{E}$ aus allen reellen Funktionen der Gestalt $f = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{Q_\nu}$ $(Q_\nu \in \mathfrak{Q},\ \lambda_\nu \in \mathsf{P})$. Auch $\mathfrak{E}$ besitzt die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ und ist überdies eine Algebra.

Wegen $\mathfrak{E} \subseteq \overline{\mathfrak{R}}$ ist das Funktional $\bar{I}\,|\,\mathfrak{E}$ als Verengerung von $\bar{I}\,|\,\overline{\mathfrak{R}}$ und folglich auch die Vervollständigung $\mathfrak{Z} = \mathfrak{V}(\mathfrak{E}, \bar{I})$ von $\mathfrak{E}$ bezüglich $\bar{I}$ definiert. $\mathfrak{Z}$ besitzt daher ebenfalls die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{R}$ und ist ebenso wie $\mathfrak{E}$ eine Algebra von Funktionen. Wegen $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{Z} \subseteq \overline{\mathfrak{R}}$ ist die Verengerung $\bar{I}\,|\,\mathfrak{Z}$ von $\bar{I}\,|\,\overline{\mathfrak{R}}$ gleich der Vervollständigung des Funktionals $\bar{I}\,|\,\mathfrak{E}$.

Nach Loomis [14] heißen die Funktionen aus $\mathfrak{Z}$ (eigentlich) *Riemann-integrierbar* bezüglich I; die einer Funktion $f \in \mathfrak{Z}$ zugeordnete reelle Zahl $\bar{I}(f)$ heißt *Riemann-Integral* von f bezüglich I. Da $\bar{I}(f)$ durch Bildung von Ober- und Untersummen nach dem Vorbild des klassischen Riemann-Integrals definiert werden kann, setzt man

$$\bar{I}(f) = \int f \, d\mu \qquad (f \in \mathfrak{Z}). \tag{7}$$

1.5. Eine nicht negative, endliche, reelle Funktion $f\,|\,E$ heißt (I-)*meßbar*, wenn die Urbildmenge

$$[f > \lambda] = \{x : f(x) > \lambda\}$$

I-quadrierbar ist für alle reellen Zahlen $\lambda > 0$, abgesehen von höchstens abzählbar unendlich vielen Ausnahmen. Eine beliebige, endliche, reelle Funktion $f|E$ heißt (I-)meßbar, wenn ihr Positivteil $f^+ = \max(f, 0)$ und ihr Negativteil $f^- = (-f)^+$ meßbar sind.

Da $\mathfrak{R}$ die Eigenschaft (3) besitzt gilt nach LOOMIS [14], S. 171:

Satz 1. *Die Funktionen aus $\overline{\mathfrak{R}}$ sind sämtlich I-meßbar. Insbesondere sind die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ meßbar in bezug auf jedes auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional.*

Zusatz. *Für eine nicht negative Funktion $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ gilt auch $[f \geqq \lambda] \in \mathfrak{Q}$ für alle $\lambda > 0$, abgesehen von höchstens abzählbar unendlich vielen Ausnahmewerten.*

Mit Hilfe des eingeführten Meßbarkeitsbegriffes können die Riemann-integrierbaren Funktionen wie folgt gekennzeichnet werden.

Satz 2. *Notwendig und hinreichend für die Riemann-Integrierbarkeit einer reellen Funktion $f|E$ bezüglich des Funktionals I ist folgende Bedingung: f ist beschränkt, I-meßbar und im Komplement einer I-quadrierbaren Menge gleich Null.*

Beweis. Es sei f Riemann-integrierbar. Wegen $\mathfrak{Z} \subseteq \overline{\mathfrak{R}}$ ist $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ und folglich nach Satz 1 meßbar. Die Funktionen aus $\mathfrak{E}$ sind als „$\mathfrak{Q}$-Treppenfunktionen" beschränkt und im Komplement einer quadrierbaren Menge gleich Null. Die gleichen Eigenschaften besitzt dann auch f als Element der Vervollständigung $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{E}$ bezüglich $\bar{I}$. Also ist die Bedingung erfüllt. Nach LOOMIS [14], S. 172 folgt aus dem Bestehen der Bedingung umgekehrt die Riemann-Integrierbarkeit von f.

In diesem Zusammenhang beweisen wir das

Lemma 2. *Eine reelle Funktion $f|E$ ist dann und nur dann im Komplement einer quadrierbaren Menge gleich Null, wenn eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ derart existiert, daß $f(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$.*

Beweis. Die Funktion f sei im Komplement der quadrierbaren Menge Q gleich Null. Zu Q existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{R}$ mit $\chi_Q \leqq h$; diese leistet das Verlangte. — Umgekehrt existiere zu f eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ mit der genannten Eigenschaft. Nach Satz 1 ist h meßbar. Daher existiert eine reelle Zahl λ mit $0 < \lambda < 1$, für welche die Urbildmenge $Q = [h > \lambda]$ quadrierbar ist. Für ein beliebiges nicht in Q gelegenes Element $x \in E$ ist $h(x) \leqq \lambda < 1$ und folglich $f(x) = 0$. Also ist f im Komplement von Q gleich Null.

Mit Hilfe dieses Lemmas ergeben sich nun zwei Korollare zu Satz 2.

Korollar 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{R}$ sämtlich bezüglich I und damit bezüglich eines jeden auf $\mathfrak{R}$ definierten, positiven, linearen Funktionals Riemann-integrierbar sind, ist folgende Bedingung:*

(8) *Zu jeder Funktion $g \in \mathfrak{R}$ existiert eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ derart, daß $g(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$ [7].*

[7] Die Bedingung (8) tritt in anderem Zusammenhang auch bei ARENS [1] auf.

Beweis. Wegen Satz 2 und Lemma 2 ist nur noch zu zeigen, daß die Bedingung (8) notwendig ist. Hierzu sei g eine Funktion aus $\mathfrak{R}$. Wir setzen $g' = \min(1, g^+) - \min(1, g^-)$, wobei g^+ den Positiv- und g^- den Negativteil von g bezeichnet. Dann ist g' eine beschränkte Funktion aus $\mathfrak{R}$. Nach Satz 2 und Lemma 2 existiert also eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ derart, daß aus $h(x) < 1$ stets $g'(x) = 0$ folgt. Die Funktion h leistet auch bezüglich g das in (8) Verlangte: Für ein $x \in E$ ist entweder $g^+(x) = 0$ oder $g^-(x) = 0$; folglich zieht $g'(x) = 0$ die Gleichungen $g^+(x) = g^-(x) = g(x) = 0$ nach sich.

Korollar 2. *Eine beschränkte, durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbare, reelle Funktion $f|E$ ist dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I und damit bezüglich eines jeden auf $\mathfrak{R}$ definierten, positiven, linearen Funktionals, wenn eine nicht negative Funktion $h \in \mathfrak{R}$ existiert derart, daß $f(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$.*

Beweis. Wegen der Sätze 1 und 2 sowie wegen Lemma 2 genügt es zu zeigen, daß die Funktion f in $\overline{\mathfrak{R}}$ liegt, falls zu f ein $h \in \mathfrak{R}$ mit den genannten Eigenschaften existiert. Hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geqq 0$ angenommen werden, da mit f auch f^+ und f^- beschränkt und durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbar sind und da aus $h(x) < 1$ auch $f^+(x) = f^-(x) = 0$ folgt. Zu $f \geqq 0$ und einer beliebigen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert aber nach Lemma 1 eine Funktion $g \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leqq g \leqq f \leqq g + \varepsilon$. Da aus $f(x) \neq 0$ für ein $x \in E$ folgt $h(x) \geqq 1$, gilt dann sogar $g' \leqq f \leqq h'$, wobei $g' = g$ und $h' = g - \varepsilon h$ Funktionen aus $\mathfrak{R}$ sind. Wegen $I(h' - g') = \varepsilon I(h)$ liegt also f in $\overline{\mathfrak{R}}$.

1.6. Eine nicht negative, endliche, reelle Funktion $f|E$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar* (bezüglich des Funktionals I), wenn f I-meßbar und die Menge der für alle $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leqq f$ gebildeten Zahlen $\int g\, d\mu$ nach oben beschränkt ist. Als uneigentliches Riemann-Integral $\overset{(u)}{\int} f\, d\mu$ von f wird die reelle Zahl

$$\overset{(u)}{\int} f\, d\mu = \sup\left(\int g\, d\mu;\ g \leqq f,\ g \in \mathfrak{S}\right) \tag{9}$$

definiert. Eine beliebige reelle Funktion $f|E$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn ihr Positiv- und Negativteil uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$$\overset{(u)}{\int} f\, d\mu = \overset{(u)}{\int} f^+\, d\mu - \overset{(u)}{\int} f^-\, d\mu. \tag{10}$$

Aus Satz 2 folgt, daß die Menge $\mathfrak{Z}$ der eigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen ein *gesättigter*, linearer Unterraum von $\overline{\mathfrak{R}}$ ist, d.h. ein linearer Unterraum mit folgender Eigenschaft:

(11) *Aus $|g| \leq |f|$, wobei $f \in \mathfrak{Z}$ und $g \in \overline{\mathfrak{R}}$ ist, folgt $g \in \mathfrak{Z}$.*

Also sind die Begriffsbildungen von [5] anwendbar. Danach heißt ein auf $\overline{\mathfrak{R}}$ definiertes, positives, lineares Funktional L *$\mathfrak{Z}$-singulär*, wenn

$$L(f) = \sup\left(L(g);\ g \leqq f,\ g \in \mathfrak{S}\right) \tag{12}$$

für jede nicht negative Funktion $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ gilt.

Satz 3. *Die Funktionen aus $\overline{\mathfrak{R}}$ sind sämtlich uneigentlich Riemann-integrierbar bezüglich I. Das somit für alle $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ definierte uneigentliche Riemann-Integral $\overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ ist die einzig mögliche Fortsetzung des auf $\mathfrak{S}$ definierten, positiven, linearen Funktionals $g \to \int g\,d\mu$ zu einem $\mathfrak{S}$-singulären, positiven, linearen Funktional auf $\overline{\mathfrak{R}}$. Hierbei gilt für jedes $f \in \overline{\mathfrak{R}}$*

$$\left|\overset{(u)}{\int} f\,d\mu\right| \leq \bar{I}(|f|). \tag{13}$$

Beweis. Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\overline{\mathfrak{R}}$. Zufolge (7) gilt dann $\int g\,d\mu \leq I(f)$ für jedes $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leq f$. Da f nach Satz 1 auch meßbar ist, so ist also f uneigentlich Riemann-integrierbar. Gleiches gilt dann für eine beliebige Funktion $f \in \overline{\mathfrak{R}}$, da mit f auch f^+ und f^- Elemente von $\overline{\mathfrak{R}}$ sind. Für nicht negative Funktionen $f', f'' \in \overline{\mathfrak{R}}$ folgt aus (9) $\overset{(u)}{\int}(f'+f'')\,d\mu = \overset{(u)}{\int} f'\,d\mu + \overset{(u)}{\int} f''\,d\mu$. Hierzu genügt es zu bemerken, daß zu jeder Funktion $g \in \mathfrak{S}$ mit $0 \leq g \leq f'+f''$ Funktionen $g', g'' \in \mathfrak{S}$ mit $g = g'+g''$ sowie $0 \leq g' \leq f'$ und $0 \leq g'' \leq f''$ existieren; wegen (11) leisten z.B. $g' = \min(g, f')$ und $g'' = \max(0, g-f')$ das Verlangte. Aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\overset{(u)}{\int}(f'+f'')\,d\mu = \overset{(u)}{\int} f'\,d\mu + \overset{(u)}{\int} f''\,d\mu$$

und $\overset{(u)}{\int} f'\,d\mu \geq 0$ für beliebige $f', f'' \in \overline{\mathfrak{R}}$ mit $f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$ sowie aus (10) folgt aber (vgl. [8], S. 34), daß $f \to \overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$ ein positives, lineares Funktional ist. Daß dieses die einzig mögliche $\mathfrak{S}$-singuläre Fortsetzung des auf $\mathfrak{S}$ erklärten, eigentlichen Riemann-Integrals ist, folgt aus (9) und (10). Aus (9) folgt (13) zunächst für den Spezialfall einer Funktion $f \geq 0$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$ und hieraus allgemein bei Beachtung von (10).

§ 2. Zerlegungssätze

2.1. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Vektorverband von auf einer Menge A definierten, endlichen, reellen Funktionen und L ein auf $\mathfrak{M}$ definiertes, positives, lineares Funktional. Dann heißt L bekanntlich *stetig*, wenn es der folgenden Bedingung genügt: Für jede nicht fallende Folge $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}$, deren obere Einhüllende $f = \sup f_n$ ein Element von $\mathfrak{M}$ ist, gilt $L(f) = \sup L(f_n)$. Dagegen heißt L *rein-unstetig*, wenn $K = 0$ das einzige stetige, (positive) lineare Funktional auf $\mathfrak{M}$ ist mit $0 \leq K(f) \leq L(f)$ für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{M}$.

Nach einem in [3], S. 116 von uns bewiesenen Zerlegungssatz existieren zu einem positiven, linearen Funktional $L|\mathfrak{M}$ genau ein stetiges, positives, lineares Funktional $L_c|\mathfrak{M}$ und genau ein rein-unstetiges, positives lineares Funktional $L_p|\mathfrak{M}$ derart, daß $L = L_c + L_p$ ist. Es heißt L_c der *stetige* und L_p der *rein-unstetige Teil* von L.

Drücken wir den Sachverhalt, daß $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine nicht fallende Folge reeller Funktionen auf A mit der oberen Einhüllenden f ist, durch das Zeichen $f_n \uparrow f$ aus und bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_+$ die Menge aller $f \in \mathfrak{M}$ mit $f \geq 0$, so gilt

Lemma 3. *Für jede Funktion* $f \in \mathfrak{M}_+$ *ist*

$$L_c(f) = \inf\left(\sup L(f_n);\ f_n \uparrow f,\ f_n \in \mathfrak{M}_+\right).$$

Beweis. Wir setzen $L^*(f) = \inf\left(\sup L(f_n);\ f_n \uparrow f,\ f_n \in \mathfrak{M}_+\right)$ für eine beliebige Funktion $f \in \mathfrak{M}_+$ und behaupten zunächst, daß L^* auf genau eine Weise zu einem positiven, linearen Funktional auf $\mathfrak{M}$ fortgesetzt werden kann, welches wir ebenfalls mit L^* bezeichnen. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß (a) $L^*(f+g) = L^*(f) + L^*(g)$ und (b) $L^*(f) \geqq 0$ ist für beliebige Funktionen $f, g \in \mathfrak{M}_+$. Während (b) unmittelbar klar ist, folgt (a) aus der Bemerkung, daß die Existenz einer Folge von Funktionen $h_n \in \mathfrak{M}_+$ mit $h_n \uparrow f+g$ äquivalent ist mit der Existenz zweier Folgen von Funktionen $f_n \in \mathfrak{M}_+$ und $g_n \in \mathfrak{M}_+$ mit $h_n = f_n + g_n$ sowie $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$. Bei gegebener Folge $\{h_n\}$ leisten nämlich $f_n = \min(h_n, f)$ und $g_n = h_n - f_n = \max(0, h_n - f)$ das Verlangte; aus $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$ folgt umgekehrt $f_n + g_n \uparrow f+g$.

Wir behaupten weiter, daß $L^* | \mathfrak{M}$ stetig ist. Es genügt hierfür zu zeigen, daß $L^*(f) \leq \sup L^*(f_n)$ ist für jede Folge $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $f_n \uparrow f$ und $f \in \mathfrak{M}_+$. Nach Definition von L^* existiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und für jedes $n = 1, 2, \ldots$ eine Folge $\{g_{nk}\}_{k=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $g_{nk} \uparrow f_n$ und

$$\sup_{k=1,2,\ldots} L(g_{nk}) \leq L^*(f_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Wir setzen $f_{nk} = \max(g_{1k}, \ldots, g_{nk})$ und zeigen mittels vollständiger Induktion nach n die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sup_{k=1,2,\ldots} L(f_{nk}) \leq L^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Der Schluß von n auf $n+1$ verläuft so: Setzt man $h_{nk} = \min(f_{nk}, g_{n+1,k})$, so ist $f_{n+1,k} = \max(f_{nk}, g_{n+1,k}) = f_{nk} + g_{n+1,k} - h_{nk}$ und folglich

$$L(f_{n+1,k}) = L(f_{nk}) + L(g_{n+1,k}) - L(h_{nk})$$

$$\leq L^*(f_n) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + L^*(f_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - L(h_{nk});$$

wegen $h_{nk} \uparrow f_n$ ist $L^*(f_n) \leq \sup_{k=1,2,\ldots} L(h_{nk})$ und daher, wie behauptet,

$$\sup_{k=1,2,\ldots} L(f_{n+1,k}) \leq L^*(f_{n+1}) + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Nach Konstruktion gilt $f_{nk} \leq f_{n+1,k+1}$ und entsprechend $L(f_{nk}) \leq L(f_{n+1,k+1})$ für beliebige $n, k = 1, 2, \ldots$. Es ist also $\{f_{nn}\}_{n=1,2,\ldots}$ eine nicht fallende Folge von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $\sup f_{nn} = \sup_n \left(\sup_k f_{nk}\right) = f$ und $\sup L(f_{nn}) = \sup_n \left(\sup_k L(f_{nk})\right)$[8]. Aus der für alle $n = 1, 2, \ldots$ bewiesenen Ungleichung folgt also nunmehr

$$L^*(f) \leq \sup L(f_{nn}) \leq \sup L^*(f_n) + \varepsilon$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und hieraus $L^*(f) \leq \sup L^*(f_n)$. Also ist L^* stetig.

[8]) Vgl. Haupt-Aumann-Pauc [12a], S. 147, Nr. 5.4.4.1.

Nach Definition von L^* ist $L-L^*$ ein positives, lineares Funktional auf $\mathfrak{M}$. Wir zeigen, daß $L-L^*$ rein-unstetig ist. Hierzu sei $K|\mathfrak{M}$ ein stetiges, positives, lineares Funktional mit $0 \leqq K(f) \leqq L(f)-L^*(f)$ für alle $f \in \mathfrak{M}_+$. Für eine beliebige Folge $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{M}_+$ mit $f_n \uparrow f$ und $f \in \mathfrak{M}_+$ gilt dann die Ungleichung $0 \leqq K(f) \leqq \sup L(f_n) - L^*(f)$ wegen der Stetigkeit von K und L^*. Hieraus folgt $K(f)=0$ nach Definition von L^*. Also ist $L-L^*$ rein-unstetig.

Aus den bewiesenen Eigenschaften von L^* folgt $L^*=L_c$ und damit die Behauptung.

2.2. Wie in § 1 sei nun wieder ein System $\mathfrak{R}$ auf einer Menge E definierter, reeller Funktionen mit den Eigenschaften (1) bis (3) und ein positives, lineares Funktional $I|\mathfrak{R}$ vorgegeben.

Bezeichnet I_c den stetigen und I_p den rein-unstetigen Teil von $I|\mathfrak{R}$, so ergeben sich die zweiseitigen Vervollständigungen

$$\overline{\mathfrak{R}}_c = \mathfrak{V}(\mathfrak{R}, I_c) \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{R}}_p = \mathfrak{V}(\mathfrak{R}, I_p)$$

von $\mathfrak{R}$ bezüglich I_c und I_p sowie die Booleschen Mengenverbände

$$\mathfrak{Q}_c = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I_c) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q}_p = \mathfrak{Q}(\mathfrak{R}, I_p)$$

bestehend aus allen I_c- bzw. I_p-quadrierbaren Teilmengen von E. Schließlich ergeben sich noch die Systeme $\mathfrak{Z}_c$ und $\mathfrak{Z}_p$ der bezüglich I_c bzw. I_p Riemann-integrierbaren Funktionen. Wir behaupten die Gültigkeit der folgenden drei Gleichungen[9]):

$$\overline{\mathfrak{R}} = \overline{\mathfrak{R}}_c \cap \overline{\mathfrak{R}}_p; \tag{14}$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_c \cap \mathfrak{Q}_p; \tag{15}$$

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_c \cap \mathfrak{Z}_p. \tag{16}$$

Zum Beweis von (14) sei $f \in \overline{\mathfrak{R}}$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren dann Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $g \leqq f \leqq h$ und $I(h-g) \leqq \varepsilon$. Wegen $I_c(h-g) \leqq I(h-g)$ und $I_p(h-g) \leqq I(h-g)$ ist also $f \in \overline{\mathfrak{R}}_c \cap \overline{\mathfrak{R}}_p$. Umgekehrt sei $f \in \overline{\mathfrak{R}}_c \cap \overline{\mathfrak{R}}_p$. Dann existieren zu beliebigem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g', h', g'', h'' \in \mathfrak{R}$ mit $g' \leqq f \leqq h'$ und $g'' \leqq f \leqq h''$ derart, daß $I_c(h'-g') \leqq \varepsilon$ und $I_p(h''-g'') \leqq \varepsilon$ ist. Setzen wir also $g = \max(g', g'')$ und $h = \min(h', h'')$, so sind g und h Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit $g \leqq f \leqq h$ und $h-g \leqq \min(h'-g', h''-g'')$. Folglich ist $I(h-g) = I_c(h-g) + I_p(h-g) \leqq 2\varepsilon$, also $f \in \overline{\mathfrak{R}}$. — Aus (14) folgt (15), da $Q \in \mathfrak{Q}$ gleichbedeutend mit $\chi_Q \in \overline{\mathfrak{R}}$ ist. — Eine reelle Funktion $f|E$, die sowohl im Komplement einer I_c-quadrierbaren Menge als auch im Komplement einer I_p-quadrierbaren Menge gleich Null ist, ist nach Lemma 2 auch im Komplement einer I-quadrierbaren Menge gleich Null. Beachtet man dies, so folgt (16) aus (15) und Satz 2.

[9]) Bei deren Beweis wird nur benützt, daß I_c und I_p positive, lineare Funktionale auf $\mathfrak{R}$ mit $I = I_c + I_p$ sind.

2.3. Nach 1.2 können die Funktionale $I_c|\mathfrak{R}$ und $I_p|\mathfrak{R}$ zu positiven, linearen Funktionalen $\overline{I}_c\,\overline{\mathfrak{R}}_c$ und $\overline{I}_p|\overline{\mathfrak{R}}_p$ vervollständigt werden; wegen (14) ist $\overline{\mathfrak{R}}$ der Durchschnitt der Definitionsbereiche von $\overline{I}_c$ und $\overline{I}_p$. Nach 1.3 leiten sich aus I_c und I_p die vollständigen Inhalte $\mu_c|\mathfrak{Q}_c$ und $\mu_p|\mathfrak{Q}_p$ ab, welche wegen (15) insbesondere auf $\mathfrak{Q}$ definiert sind. Der folgende Satz enthält unter anderem die Aussage, daß $\mu_c\,\mathfrak{Q}$ der σ-additive und $\mu_p|\mathfrak{Q}$ der rein-endlich-additive Teil von $\mu|\mathfrak{Q}$ ist.

Hierzu sei bemerkt, daß eine auf einem Booleschen Verband $\mathfrak{V}$ von Teilmengen einer Grundmenge A definierte, nicht negative, additive Mengenfunktion ϱ *σ-additiv* heißt, wenn $\sup \varrho(M_n) = \varrho(M)$ ist für jede nicht fallende Folge $\{M_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Mengen aus $\mathfrak{V}$ mit $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathfrak{V}$. Dagegen heißt ϱ *rein-endlich-additiv*, wenn $\tau = 0$ die einzige σ-additive Funktion $\tau|\mathfrak{V}$ ist mit $0 \leqq \tau(M) \leqq \varrho(M)$ für alle $M \in \mathfrak{V}$. Nach Yosida und Hewitt [23][10]) existieren zu jeder nicht negativen, additiven Funktion $\varrho|\mathfrak{V}$ genau eine nicht negative, σ-additive Funktion $\varrho_c|\mathfrak{V}$ und genau eine nicht negative, rein-endlich-additive Funktion $\varrho_p|\mathfrak{V}$ mit $\varrho = \varrho_c + \varrho_p$. Man nennt ϱ_c den *σ-additiven* und ϱ_p den *rein-endlich-additiven Teil* von ϱ. In Analogie zu der in Lemma 3 behaupteten Formel gilt nach Woodbury [22][11])

$$\varrho_c(M) = \inf\left(\sup \varrho(M_n);\ M_n \uparrow M,\ M_n \in \mathfrak{V}\right) \tag{17}$$

für alle $M \in \mathfrak{V}$. Hierbei steht $M_n \uparrow M$ für $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

Der bereits angekündigte Satz lautet nun:

Satz 4. I. *Es ist $\overline{I}_c|\overline{\mathfrak{R}}$ der stetige und $\overline{I}_p|\overline{\mathfrak{R}}$ der rein-unstetige Teil des Funktionals $\bar{I}|\overline{\mathfrak{R}}$; also gilt auf $\overline{\mathfrak{R}}$*

$$\overline{I}_c = \bar{I}_c \quad \text{und} \quad \overline{I}_p = \bar{I}_p. \tag{18}$$

II. *Es ist $\mu_c|\mathfrak{Q}$ der σ-additive und $\mu_p|\mathfrak{Q}$ der rein-endlich-additive Teil von $\mu|\mathfrak{Q}$.*

Beweis. *Zu* I. Wir zeigen zunächst, daß das Funktional $\overline{I}_c|\overline{\mathfrak{R}}_c$ stetig ist; insbesondere ist dann $\overline{I}_c\,\overline{\mathfrak{R}}$ stetig. Hierzu sei $f \in \overline{\mathfrak{R}}_c$ und $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von Funktionen aus $\overline{\mathfrak{R}}_c$ mit $f_n \uparrow f$; ferner sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann existiert ein $g \in \mathfrak{R}$ mit $g \leqq f$ und $\overline{I}_c(f) - \varepsilon \leqq I_c(g)$, sowie für $n = 1, 2, \ldots$ ein $h_n \in \mathfrak{R}$ mit $f_n \leqq h_n$ und $I_c(h_n) \leqq \overline{I}_c(f_n) + \varepsilon/2^n$. Setzen wir $g_n = \max(h_1, \ldots, h_n)$ für jedes n, so ist $\{g_n\}$ eine nicht fallende Folge von Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit $f_n \leqq g_n$ und $I_c(g_n) \leqq \overline{I}_c(f_n) + \varepsilon(1 - 1/2^n)$; diese Ungleichung beweist man wie die hierzu analoge Ungleichung im Beweis von Lemma 3 durch vollständige Induktion nach n. Nun ist $g \leqq f \leqq \sup g_n$ und folglich $I_c(g) \leqq \sup I_c(g_n)$ wegen der Stetigkeit von $I_c|\mathfrak{R}$. Hieraus folgt $\overline{I}_c(f) - \varepsilon \leqq I_c(g) \leqq \sup I_c(g_n) \leqq \sup \overline{I}_c(f_n) + \varepsilon$; also ist $\overline{I}_c(f) \leqq \sup \overline{I}_c(f_n)$. Wegen der Positivität von $\overline{I}_c|\overline{\mathfrak{R}}_c$ folgt hieraus die behauptete Stetigkeit.

[10]) Wie in [3], S. 113 von Verf. gezeigt wurde, ist die bei Yosida-Hewitt gemachte Annahme der Existenz der Einheit A in V unnötig.

[11]) Ein Beweis dieser Formel unter allgemeineren Voraussetzungen findet sich in [6], S. 219.

Das Funktional $\overline{I_p}|\overline{\mathfrak{R}}$ (und damit auch $\overline{I_p}|\overline{\mathfrak{R}}_p$) ist rein-unstetig. Es sei nämlich $K|\overline{\mathfrak{R}}$ ein stetiges, positives, lineares Funktional mit $0 \leq K(f) \leq \overline{I_p}(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$. Da $\overline{I_p}(g) = I_p(g)$ für alle $g \in \mathfrak{R}$ und $I_p|\mathfrak{R}$ rein-unstetig ist, folgt dann zunächst $K(g) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{R}$ und hieraus $K(f) = 0$ für alle $f \in \overline{\mathfrak{R}}$. Man hat hierzu nur zu berücksichtigen, daß $\overline{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{R}, K)$ ist.

Schließlich ist $\overline{I_c} + \overline{I_p}$ eine Fortsetzung von $I|\mathfrak{R}$ zu einem positiven, linearen Funktional auf $\overline{\mathfrak{R}}$. Da $\bar{I}|\overline{\mathfrak{R}}$ nach 1.2 die einzige derartige Fortsetzung ist, gilt $\bar{I} = \overline{I_c} + \overline{I_p}$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$. Also ist $\overline{I_c} = \bar{I}_c$ und $\overline{I_p} = \bar{I}_p$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$, wie behauptet wurde.

Zu II. Es sei $\{Q_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{Q}_c$ mit $Q_n \uparrow Q$ und $Q \in \mathfrak{Q}_c$. Dann gilt $\chi_{Q_n} \uparrow \chi_Q$ für die Folge der zugehörigen charakteristischen Funktionen. Zufolge der bereits bewiesenen Stetigkeit von $\overline{I_c}|\overline{\mathfrak{R}}_c$ ist also $\sup \mu_c(Q_n) = \sup \overline{I_c}(\chi_{Q_n}) = \overline{I_c}(\chi_Q) = \mu_c(Q)$. Folglich ist $\mu_c|\mathfrak{Q}_c$ und damit auch $\mu_c|\mathfrak{Q}$ σ-additiv.

Für den Nachweis, daß $\mu_p|\mathfrak{Q}$ (und damit übrigens auch $\mu_p|\mathfrak{Q}_p$) rein-endlich-additiv ist, sei $\varrho|\mathfrak{Q}$ eine σ-additive Funktion mit $0 \leq \varrho(Q) \leq \mu_p(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Für eine beliebige Funktion f aus der Menge $\mathfrak{E}$ der $\mathfrak{Q}$-Treppenfunktionen und eine Darstellung von f in der Form $f = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{Q_\nu}$ mit $Q_\nu \in \mathfrak{Q}$ und reellen Zahlen λ_ν setzen wir $R(f) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \varrho(Q_\nu)$. Dann ist bekanntlich[12]) $R|\mathfrak{E}$ eindeutig definiert und ein stetiges, positives, lineares Funktional. Es ist $0 \leq R(f) \leq \overline{I_p}(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{E}$. Aus dieser Ungleichung folgt $\mathfrak{S}_p \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{E}, R)$; also kann R nach 1.2 auf genau eine Weise zu einem positiven, linearen Funktional $\overline{R}$ auf $\mathfrak{S}_p$ fortgesetzt werden. Nach dem zu I. Bewiesenen (angewandt auf $R|\mathfrak{E}$ an Stelle von $I_c|\mathfrak{R}$) ist $\overline{R}|\mathfrak{S}_p$ stetig; ferner gilt $0 \leq \overline{R}(f) \leq \overline{I_p}(f)$ für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{S}_p$. Wie im Beweis des Satzes 3 zeigt man, daß $\overline{R}|\mathfrak{S}_p$ auf genau eine Weise zu einem $\mathfrak{S}_p$-singulären, positiven, linearen Funktional $I_\varrho|\overline{\mathfrak{R}}_p$ fortgesetzt werden kann. Für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\overline{\mathfrak{R}}_p$ gilt dann wegen (12) $I_\varrho(f) = \sup(\overline{R}(g); g \leq f, g \in \mathfrak{S}_p)$; hieraus folgt $0 \leq I_\varrho(f) \leq \overline{I_p}(f)$ für jedes solche f. Da $\overline{I_p}|\overline{\mathfrak{R}}_p$ nach dem zu I. Bewiesenen rein-unstetig ist, folgt also $I_\varrho(f) = 0$ für alle $f \in \overline{\mathfrak{R}}_p$ und hieraus $\varrho(Q) = 0$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$, falls I_ϱ ein stetiges Funktional ist. Um zu zeigen, daß $\mu_p|\mathfrak{Q}$ rein-endlich-additiv ist, haben wir also noch die Stetigkeit von I_ϱ zu beweisen. Hierzu sei $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge nicht negativer Funktionen aus $\overline{\mathfrak{R}}_p$ mit $f_n \uparrow f$ und $f \in \overline{\mathfrak{R}}_p$. Wegen der Positivität von I_ϱ ist nur $I_\varrho(f) \leq \sup I_\varrho(f_n)$ zu zeigen. Setzen wir $g_n = \min(f_n, g)$ für eine beliebige Funktion $g \in \mathfrak{S}_p$ mit $0 \leq g \leq f$, so sind, da $\mathfrak{S}_p$ ein gesättigter, linearer Unterraum von $\overline{\mathfrak{R}}_p$ ist, alle g_n Elemente von $\mathfrak{S}_p$; ferner gilt $g_n \uparrow g$. Wegen der Stetigkeit von $\overline{R}|\mathfrak{S}_p$ ist also $\overline{R}(g) = \sup \overline{R}(g_n)$. Es ist $\overline{R}(g_n) \leq I_\varrho(f_n)$ für jedes n und somit $\overline{R}(g) \leq \sup I_\varrho(f_n)$. Da $g \in \mathfrak{S}_p$ beliebig mit $0 \leq g \leq f$ gewählt war, folgt hieraus die behauptete Ungleichung $I_\varrho(f) \leq \sup I_\varrho(f_n)$.

---

[12]) Vgl. etwa AUMANN [2], S. 365, Satz 9.1.3.1.

Aus der für alle $f \in \mathfrak{R}$ gültigen Gleichung $\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_p$ folgt schließlich $\mu(Q) = \mu_c(Q) + \mu_p(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Also ist auf $\mathfrak{Q}$ μ_c der σ-additive und μ_p der rein-endlich-additive Teil von μ.

Korollar. *Auf $\mathfrak{E}$ ist $f \to \int f\,d\mu_c$ der stetige und $f \to \int f\,d\mu_p$ der rein-unstetige Teil des auf $\mathfrak{E}$ definierten Funktionals $f \to \int f\,d\mu$.*

Beweis. Es ist $\int f\,d\mu = \int f\,d\mu_c + \int f\,d\mu_p$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{E}$, da auf $\mathfrak{R}$ die Gleichung $\bar{I} = \bar{I}_c + \bar{I}_p$ gilt. Das auf $\mathfrak{E}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \to \int f\,d\mu_c$ ist als Verengerung des stetigen Funktionals $\bar{I}_c | \mathfrak{R}$ selbst stetig. Um zu zeigen, daß das auf $\mathfrak{E}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \to \int f\,d\mu_p$ rein-unstetig ist, sei $K | \mathfrak{E}$ ein stetiges, positives, lineares Funktional mit $0 \leqq K(f) \leqq \int f\,d\mu_p$ für alle $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{E}$. Setzen wir $\varkappa(Q) = K(\chi_Q)$ für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$, so ist $\varkappa | \mathfrak{Q}$ σ-additiv und es gilt $0 \leqq \varkappa(Q) \leqq \mu_p(Q)$ für alle $Q \in \mathfrak{Q}$. Nach der Behauptung II von Satz 4 ist also $\varkappa = 0$. Dann ist aber $K = 0$ auf $\mathfrak{E}$, da aus der für alle $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{E}$ gültigen Ungleichung $0 \leqq K(f) \leqq \int f\,d\mu_p$ folgt $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{B}(\mathfrak{E}, K)$ und somit die Fortsetzung von $K | \mathfrak{E}$ zu einem positiven, linearen Funktional auf $\mathfrak{B}(\mathfrak{E}, K)$ eindeutig bestimmt ist. Also ist das Funktional $f \to \int f\,d\mu_p$ rein-unstetig.

Nach Satz 3 sind die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ in bezug auf jedes auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional uneigentlich Riemann-integrierbar. Insbesondere existiert also $\overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c$ für jedes $f \in \mathfrak{R}$. Über dieses auf $\mathfrak{R}$ definierte Funktional behaupten wir:

Satz 5. I. *Für jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$I_c(f) = \overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c. \tag{19}$$

II. *Das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \to \overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ hat $f \to \overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c$ zum stetigen und $f \to \overset{(u)}{\int} f\,d\mu_p$ zum rein-unstetigen Teil.*

Beweis. *Zu* I. Es genügt die Gleichung $I_c(f) = \overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c$ für jede nicht negative Funktion $f \in \mathfrak{R}$ zu beweisen. Es sei also $f \in \mathfrak{R}$ nicht negativ und außerdem vorerst beschränkt: $0 \leqq f(x) \leqq K$ für alle $x \in E$. Dann existiert eine Folge $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{E}$ mit $g_n \uparrow f$. Nach Satz 1 gibt es nämlich eine Folge $\{\alpha_n\}_{n=1,2,\ldots}$ reeller Zahlen mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > 0$ und $\lim \alpha_n = 0$ derart, daß $Q_n = [f > \alpha_n]$ für jedes n I-quadrierbar ist. Die Folge der Funktionen $g_n = \min(f, K\,\chi_{Q_n})$ leistet dann das Verlangte (wegen (11) ist $g_n \in \mathfrak{E}$). Nach Satz 4, Beh. I ist $\bar{I}_c$ auf $\mathfrak{R}$ stetig; folglich gilt $I_c(f) = \sup \bar{I}_c(g_n) = \sup \int g_n\,d\mu_c \leqq \overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c$. Da nach (13) andererseits $\overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c \leqq I_c(f)$ ist, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen.

Nunmehr sei f eine beliebige nicht negative Funktion aus $\mathfrak{R}$. Dann ist $f_n = \min(n, f)$, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge beschränkter, nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit $f_n \uparrow f$; also gilt $I_c(f) = \sup I_c(f_n) = \sup \overset{(u)}{\int} f_n\,d\mu_c \leqq \overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c$ nach dem bisher Bewiesenen. Wegen (13) gilt also auch in diesem Falle (19).

Aus dem Beweis von Gl. (19) entnehmen wir noch das für das Folgende nützliche Ergebnis: Für jede Funktion $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$ ist

$$\overset{(u)}{\int} f\, d\mu_c = \sup\left(\int g\, d\mu_c;\ g \leqq f,\ g \in \mathfrak{S}\right). \tag{20a}$$

Zu II. Nach I. ist das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \to \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_c$ stetig. Das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \to \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_p$ ist rein-unstetig, da $0 \leqq \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_p \leqq I_p(f)$ für jede Funktion $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt. Es verbleibt also der Beweis der Gleichung $\overset{(u)}{\int} f\, d\mu = \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_c + \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_p$ für jedes $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$. Hierzu zeigen wir, daß neben (20a) auch

$$\overset{(u)}{\int} f\, d\mu_p = \sup\left(\int g\, d\mu_p;\ g \leqq f, g \in \mathfrak{S}\right) \tag{20b}$$

für alle $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt. Die behauptete Gleichung folgt dann nämlich so: Es bezeichne Φ die steigend gerichtete Menge aller Funktionen $g \in \mathfrak{S}$ mit $g \leqq f$; dann ist

$$\overset{(u)}{\int} f\, d\mu = \lim_{\Phi} \int g\, d\mu = \lim_{\Phi} \int g\, d\mu_c + \lim_{\Phi} \int g\, d\mu_p = \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_c + \overset{(u)}{\int} f\, d\mu_p.$$

Wir haben also nur noch den Beweis von (20b) nachzutragen. Es sei hierzu $Q \in \mathfrak{Q}_c$ mit $\chi_Q \leqq f$. Nach Satz 1 ist dann die Menge $Q' = [f > \alpha]$ für ein geeignetes α mit $0 < \alpha < 1$ Element von $\mathfrak{Q}$. Nach (11) ist $g = \min(f, \chi_{Q'})$ eine Funktion aus $\mathfrak{S}$; für diese gilt $\chi_Q \leqq g \leqq f$. — Aus der Definition der Riemann-integrierbaren Funktionen folgt unmittelbar die Gleichung

$$\overset{(u)}{\int} f\, d\mu_p = \sup\left(\int g\, d\mu_p;\ g \leqq f, g \in \mathfrak{E}_p\right),$$

wenn $\mathfrak{E}_p$ die Menge der $\mathfrak{Q}_p$-Treppenfunktionen bezeichnet. Die Gl. (20b) ist daher bewiesen, wenn gezeigt ist, daß zu beliebigem $g \in \mathfrak{E}_p$ mit $0 \leqq g \leqq f$ stets ein $g' \in \mathfrak{S}$ mit $g \leqq g' \leqq f$ existiert. Es kann g dargestellt werden in der Form $g = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{Q_\nu}$ mit paarweise fremden Mengen $Q_\nu \in \mathfrak{Q}_p$ und reellen Zahlen $\lambda_\nu > 0$. Wegen $\chi_{Q_\nu} \leqq \frac{1}{\lambda_\nu} f$ existiert, wie bereits bewiesen wurde, eine Funktion $g_\nu \in \mathfrak{S}$ mit $\chi_{Q_\nu} \leqq g_\nu \leqq \frac{1}{\lambda_\nu} f$. Setzen wir also $g' = \max(\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_n g_n)$, so ist g' eine Funktion aus $\mathfrak{S}$, die das Verlangte leistet.

Damit ist der Satz 5 vollständig bewiesen.

Im folgenden Satz vergleichen wir die auf $\mathfrak{R}$ definierten Funktionale I und $f \to \overset{(u)}{\int} f\, d\mu$ hinsichtlich der sich aus ihnen ableitenden Riemann-Integrale.

Satz 6. I. *Die auf $\mathfrak{R}$ definierten, positiven, linearen Funktionale I und $f \to \overset{(u)}{\int} f\, d\mu$ führen zur gleichen Menge $\mathfrak{S}$ Riemann-integrierbarer Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über $\mathfrak{S}$.*

II. *Das auf $\mathfrak{R}$ definierte, positive, lineare Funktional $f \to D(f) = I(f) - \overset{(u)}{\int} f\, d\mu$ ist rein-unstetig. Bezüglich D sind genau diejenigen Funktionen auf E Riemann-*

integrierbar, welche beschränkt und im Komplement einer I-quadrierbaren Menge gleich Null sind. Für jede solche Funktion ist das Riemann-Integral bezüglich D gleich Null.

Beweis. *Zu* I. Wir setzen $L(f)=\overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ für jedes $f\in\mathfrak{R}$. Dann sei $\mathfrak{Q}_L$ das System der L-quadrierbaren Mengen und $\mu_L|\mathfrak{Q}_L$ der sich aus L ableitende Inhalt. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}_L$ und $\mu=\mu_L$ ist. Zunächst ist $\mathfrak{Q}\subseteq\mathfrak{Q}_L$, da nach (13) $0\leq L(f)\leq I(f)$ für alle $f\geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt. Ferner ist $\mu(Q)=\mu_L(Q)$ für jede Menge $Q\in\mathfrak{Q}$, da einerseits $f\to\bar{I}(f)$ bzw. $f\to\overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ die einzige Fortsetzung von I bzw. L zu einem positiven, linearen Funktional auf $\bar{\mathfrak{R}}$ und andererseits $\overset{(u)}{\int} f\,d\mu=\int f\,d\mu$ für alle $f\in\mathfrak{Z}$, also insbesondere für $f=\chi_Q$ ist. Es sei Q nun eine Menge aus $\mathfrak{Q}_L$; dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon>0$ Funktionen $g,h\in\mathfrak{R}$ mit $0\leq g\leq\chi_Q\leq h$ und $L(h-g)\leq\varepsilon$. Zu g existiert nach (9) ein $g'\in\mathfrak{Z}$ mit $g'\leq g$ und $L(g)-\int g'\,d\mu\leq\varepsilon$. Ferner beweist man wie im Beweis der Behauptung II von Satz 5 die Existenz einer Funktion $h'\in\mathfrak{Z}$ mit $\chi_Q\leq h'\leq h$. Also gilt $g'\leq\chi_Q\leq h'$ und $\int(h'-g')\,d\mu\leq L(h)-\int g'\,d\mu\leq L(h-g)+\varepsilon\leq 2\varepsilon$. Hieraus folgt $Q\in\mathfrak{Q}$ wegen der Vollständigkeit des Funktionals $f\to\int f\,d\mu$ auf $\mathfrak{Z}$. Also ist $\mathfrak{Q}=\mathfrak{Q}_L$ und $\mu=\mu_L$.

Zu II. Nach Satz 5 ist $D(f)=I_c(f)+I_p(f)-\overset{(u)}{\int} f\,d\mu_c-\overset{(u)}{\int} f\,d\mu_p=I_p(f)-\overset{(u)}{\int} f\,d\mu_p$; da also $0\leq D(f)\leq I_p(f)$ für alle $f\geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gilt, ist D reinunstetig. Nach der letzten Ungleichung ist ferner die Vervollständigung $\bar{I}|\bar{\mathfrak{R}}$ von I Verengerung der Vervollständigung $\bar{D}|\mathfrak{V}(\mathfrak{R},D)$ von D, insbesondere ist $\bar{\mathfrak{R}}\subseteq\mathfrak{V}(\mathfrak{R},D)$. Da die Fortsetzung von D zu einem linearen Funktional auf $\mathfrak{V}(\mathfrak{R},D)$ nur auf genau eine Weise möglich ist, gilt daher $\bar{D}(f)=\overline{I_p}(f)-\overset{(u)}{\int} f\,d\mu_p$ für jedes $f\in\bar{\mathfrak{R}}$. Also ist $\bar{D}(f)=0$ für jedes $f\in\mathfrak{Z}$. Hieraus folgt, daß jede I-quadrierbare Menge Q und mit ihr jede Teilmenge Q' von Q D-quadrierbar ist; bezeichnet δ den zu D gehörigen Inhalt, so ist $\delta(Q')=\bar{D}(\chi_{Q'})\leq\bar{D}(\chi_Q)=0$, also $\delta(Q')=0$ für jede solche Menge Q'. Ist umgekehrt Q' eine beliebige D-quadrierbare Menge, so existiert eine I-quadrierbare Menge Q mit $Q'\subseteq Q$ und es gilt folglich wieder $\delta(Q')=0$. Zu Q' existiert nämlich ein $h\in\mathfrak{R}$ mit $\chi_{Q'}\leq h$ und hierzu eine reelle Zahl α mit $0<\alpha<1$ derart, daß $Q=[h>\alpha]$ I-quadrierbar ist; diese Menge leistet das Verlangte. Somit ist das System der D-quadrierbaren Mengen gleich dem System der Teilmengen Q' beliebiger I-quadrierbarer Mengen Q; für jede D-quadrierbare Menge Q' gilt $\delta(Q')=0$. Hieraus folgt die Behauptung (z. B. nach Satz 2).

§ 3. Riemann-Integrierbarkeit bezüglich eines linearen Funktionals. Konkreter Fall

3.1. Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Ergebnisse wenden wir nun auf folgenden Spezialfall an:

Die Menge E sei ein *lokal kompakter*[13]), topologischer *Raum*. Die Elemente von $\mathfrak{R}$ seien auf E definierte, *stetige*, (endliche) *reelle Funktionen, welche*

[13]) Im folgenden bedeutet „kompakt" stets genauer „bikompakt und Hausdorffsch".

im Unendlichen verschwinden, d.h. für jede solche Funktion g und jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ist die Urbildmenge $[|g| \geq \alpha]$ kompakt. Hieraus folgt insbesondere die Beschränktheit einer jeden Funktion $g \in \mathfrak{R}$. Die Funktionenmenge $\mathfrak{R}$ besitze wiederum die Eigenschaften (1) bis (3) und genüge daneben noch folgenden zwei Zusatzforderungen:

(21) *Zu jedem Punkt $x \in E$ existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{R}$ mit $g(x) \neq 0$.*

(22) *Zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in E$ existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{R}$ mit $h(x) \neq h(y)$.*

Beispielsweise genügt die Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{K}(E)$ aller stetigen, reellen Funktionen $g|E$ mit kompaktem Träger[14]) den Bedingungen (1) bis (3) sowie (21) und (22).

Aus den genannten Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ folgt

Lemma 4. *Zu jeder stetigen, im Unendlichen verschwindenden, reellen Funktion $f|E$ existiert eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft* (4).

Beweis. Die Menge $\mathfrak{A}$ der auf E definierten, durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbaren Funktionen besteht aus stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen und ist nach Lemma 1 eine Algebra. Wegen $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}$ besitzt $\mathfrak{A}$ die Eigenschaften (21) und (22) von $\mathfrak{R}$. Nach einem Approximationssatz von NAKANO [*15*][15]) kann daher jede stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion auf E durch Funktionen aus $\mathfrak{A}$ gleichmäßig approximiert werden. Da $\mathfrak{A}$ bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist, so ist also $\mathfrak{A}$ das System aller stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf E. Die Behauptung folgt daher aus Lemma 1.

3.2. Neben E und $\mathfrak{R}$ sei wie bisher ein auf $\mathfrak{R}$ definiertes, positives, lineares Funktional I vorgegeben. Gemäß § 1 leiten sich aus I ab: Das System $\mathfrak{Q}$ der I-quadrierbaren Teilmengen von E, der Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ und das System $\mathfrak{S}$ aller bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen.

Wir behaupten von $\mu|\mathfrak{Q}$ die folgenden vier Eigenschaften: (1) jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ist relativ kompakt, d.h. es ist $\overline{Q}$[16]) kompakt; (2) in $\mathfrak{Q}$ ist eine offene Basis von E enthalten; (3) mit Q sind auch $\overline{Q}$ und $\underline{Q}$ Elemente von $\mathfrak{Q}$ und es ist $\mu(Q) = \mu(\overline{Q}) = \mu(\underline{Q})$; (4) zu jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ und jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $Q \subseteq U$ und $\mu(U - Q) \leq \varepsilon$.

Nach HAUPT und PAUC [*11*] sind bei Gültigkeit von (1) und (2) die beiden Eigenschaften (3) und (4) äquivalent mit den beiden folgenden: (3′) für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ ist $\overline{Q} - \underline{Q} \in \mathfrak{Q}$; (4′) zu jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \in \mathfrak{Q}$ mit $\overline{Q} - \underline{Q} \subseteq U$ und $\mu(U) \leq \varepsilon$. Ein Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3′) und (4′) heißt nach HAUPT-PAUC [*11*] an

[14]) Als *Träger* einer reellen Funktion $g|E$ bezeichnet man die abgeschlossene Hülle der Menge $[g \neq 0]$.

[15]) Vgl. hierzu auch NÖBELING und BAUER [*17*], S. 72.

[16]) Mit $\overline{A}$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle, mit $\underline{A}$ den offenen Kern einer Menge $A \subseteq E$.

(die Topologie von) E *adaptiert*. Unsere Behauptung kann also auch so ausgesprochen werden:

Satz 7. *Der Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ ist an E adaptiert.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\mu|\mathfrak{Q}$ die Eigenschaften (1) bis (4) besitzt. — *Zu* (1). Zu einer Menge $Q\in\mathfrak{Q}$ existiert eine Funktion $h\in\mathfrak{R}$ mit $\chi_Q\leqq h$; folglich ist $Q\leqq[h\geqq 1]$. Da h stetig ist und im Unendlichen verschwindet, ist $[h\geqq 1]$ kompakt, also Q relativ kompakt. — *Zu* (2). Es sei V eine offene Menge in E und x_0 ein Punkt von V. Zu zeigen ist die Existenz einer offenen Menge $U\in\mathfrak{Q}$ mit $x_0\in U$ und $U\leqq V$. Zu x_0 und V existiert eine stetige Funktion $f|E$ mit $0\leqq f\leqq 1$, $f(x_0)=1$ und in V enthaltenem kompakten Träger (vgl. [8], S. 49). Nach Lemma 4 gibt es zu f eine Funktion $g\in\mathfrak{R}$ mit $0\leqq g\leqq f\leqq g+\frac{1}{2}$ und weiter nach Satz 1 eine reelle Zahl α mit $0<\alpha<\frac{1}{2}$, für welche die offene Urbildmenge $U=[g>\alpha]$ ein Element von $\mathfrak{Q}$ ist. Aus $f(x_0)=1$ folgt $g(x_0)\geqq\frac{1}{2}$; also ist $x_0\in U$. Für einen beliebigen Punkt $x\in U$ ist $f(x)\geqq g(x)>\alpha>0$; da f im Komplement von V gleich Null ist, gilt also $x\in V$. Folglich ist $U\leqq V$. Die Menge U leistet somit das Verlangte. — *Zu* (3). Es sei Q eine Menge aus $\mathfrak{Q}$, g und h seien Funktionen aus $\mathfrak{R}$ mit $g\leqq\chi_Q\leqq h$. Wegen der Stetigkeit von g und h gilt dann auch $g\leqq\chi_{\underline{Q}}\leqq\chi_Q\leqq\chi_{\overline{Q}}\leqq h$. Hieraus und aus der Definition von μ folgt, daß $\overline{Q}$ und $\underline{Q}$ quadrierbare Mengen mit $\mu(\overline{Q})=\mu(\underline{Q})=\mu(Q)$ sind. — *Zu* (4). Es sei Q eine quadrierbare Menge. Zu einer beliebig reellen Zahl η mit $0<\eta<1$ existiert dann ein $h\in\mathfrak{R}$ mit $\chi_Q\leqq h$ und $I(h)\leqq\mu(Q)+\eta$. Nach Satz 1 gibt es eine Zahl η' mit $0<\eta'\leqq\eta$ derart, daß die offene Urbildmenge $U=[h>1-\eta']$ quadrierbar ist. Wir behaupten, daß $Q\leqq U$ und $\mu(U-Q)\leqq\frac{\eta}{1-\eta}\big(1+\mu(Q)\big)$ ist; hieraus folgt dann (4). Aus $x\in Q$ folgt $h(x)\geqq 1>1-\eta'$ und hieraus $x\in U$; also ist $Q\leqq U$. Nach Definition von U ist $(1-\eta')\,\chi_U\leqq h$ und daher $(1-\eta')\mu(U)\leqq I(h)$. Hieraus ergibt sich $(1-\eta)\mu(U)\leqq(1-\eta')\mu(U)\leqq I(h)\leqq\mu(Q)+\eta$ und weiter $(1-\eta)\mu(U-Q)=(1-\eta)\big(\mu(U)-\mu(Q)\big)\leqq\mu(Q)+\eta-(1-\eta)\mu(Q)=\eta\big(1+\mu(Q)\big)$. Es gilt also $\mu(U-Q)\leqq\frac{\eta}{1-\eta}\big(1+\mu(Q)\big)$, wie behauptet. — Damit ist der Satz bewiesen.

Allein aus der Adaption von $\mu|\mathfrak{Q}$ an E ergeben sich nun unter anderem die im folgenden Korollar genannten Eigenschaften von μ und $\mathfrak{Q}$.

Korollar. I. *Zu jeder kompakten Menge K und jeder offenen Menge U mit $K\leqq U$ existiert eine Menge $Q\in\mathfrak{Q}$ mit $K\leqq Q\leqq U$.*

II. *Zu jeder Menge $Q\in\mathfrak{Q}$ sowie zu beliebigem $\varepsilon>0$ existieren eine kompakte Menge $K\in\mathfrak{Q}$ und eine offene Menge $U\in\mathfrak{Q}$ mit $K\leqq Q\leqq U$ und $\mu(U-K)\leqq\varepsilon$.*

Beweis. Vgl. Haupt-Pauc [11], S. 192.

3.3. Nach 3.2 genügt $\mathfrak{Q}$ den bei Bourbaki [8], S. 164—165 genannten Bedingungen (PC_I), (PC_{II}) und $\mu|\mathfrak{Q}$ den Bedingungen (PM_I), (PM_{II}). Folglich existiert nach Bourbaki *genau ein* positives Radonsches Maß ϱ auf E, in bezug auf welches alle Mengen $Q\in\mathfrak{Q}$ ϱ-integrierbar mit $\varrho(Q)=\mu(Q)$ sind.

Dieses eindeutig bestimmte Radonsche Maß läßt sich auch wie folgt kennzeichnen[17]):

Satz 8. *Jede auf E stetige Funktion mit kompaktem Träger ist Riemann-integrierbar bezüglich I. Das somit auf $\mathfrak{K}(E)$ definierte lineare Funktional $f \to \int f\,d\mu$ ist das einzige positive Radonsche Maß ϱ auf E, in bezug auf welches jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ϱ-integrierbar mit $\varrho(Q) = \mu(Q)$ ist. Allgemeiner ist jede bezüglich I Riemann-integrierbare Funktion f sowohl ϱ-integrierbar als auch bezüglich ϱ Riemann-integrierbar*[18]) *und es ist*

$$\int f\,d\varrho = \int f\,d\mu; \tag{23}$$

in dieser Gleichung kann $\int f\,d\varrho$ sowohl als ϱ-Integral als auch als Riemann-Integral bezüglich ϱ gedeutet werden.

Beweis. Es sei f eine Funktion aus $\mathfrak{K}(E)$ und K der kompakte Träger von f. Nach dem Korollar zu Satz 7 gibt es dann eine Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ mit $K \subseteq Q$. Nach Lemma 4 kann f durch Funktionen aus $\mathfrak{K}$ gleichmäßig approximiert werden. Also folgt aus dem Korollar 2 zu Satz 2 und aus Lemma 2, daß f Riemann-integrierbar bezüglich I ist. Setzen wir $\int f\,d\varrho = \int f\,d\mu$ für jedes $f \in \mathfrak{K}(E)$, so ist offenbar ϱ ein positives Radonsches Maß auf E. Daß jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ϱ-integrierbar mit $\varrho(Q) = \mu(Q)$ ist, ergibt sich aus der jetzt zu beweisenden, allgemeineren Aussage: Jede Funktion $f \in \mathfrak{F}$ ist ϱ-integrierbar und zugleich bezüglich ϱ Riemann-integrierbar; es gilt (23). Hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geqq 0$ vorausgesetzt werden. Da f im Komplement einer I-quadrierbaren Menge gleich Null ist, existiert nach

[17]) Bezüglich der im folgenden verwendeten Begriffe aus der Theorie Radonscher Maße sei auf BOURBAKI [8] verwiesen. Ein positives Radonsches Maß ϱ auf E ist demnach ein positives, lineares Funktional auf der Menge $\mathfrak{K}(E)$ aller stetigen Funktionen $f|E$ mit kompaktem Träger, wobei $\int f\,d\varrho$ für $\varrho(f)$ steht und den Funktionswert von ϱ an der Stelle $f \in \mathfrak{K}(E)$ bezeichnet. Nach BOURBAKI definiert man für jede nicht negative Funktion $q|E$ das ϱ-Oberintegral $\int^* q\,d\varrho$. Es erweist sich dann $N^*(f) = \int^* |f|\,d\varrho$ als Quasi-Norm im System aller Funktionen $f|E$. Eine Funktion $f|E$ heißt ϱ-integrierbar, wenn $N^*(f) < +\infty$ ist und eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathfrak{K}(E)$ mit $\lim_{n\to\infty} N^*(f - f_n) = 0$ existiert; man setzt $\int f\,d\varrho = N^*(f^+) - N^*(f^-)$. Eine Teilmenge A von E, deren charakteristische Funktion χ_A ϱ-integrierbar ist, wird selbst als ϱ-integrierbar bezeichnet; man setzt $\varrho(A) = \int \chi_A\,d\varrho$. Nachträglich erweist sich dann $\int f\,d\varrho$ als Unterteilungsintegral nach dieser Mengenfunktion. — Wendet man dagegen auf das auf $\mathfrak{K}(E)$ definierte Funktional $f \to \int f\,d\varrho$ den sog. ersten (mit Folgen und nicht mit gerichteten Systemen arbeitenden) Erweiterungsprozeß von STONE [21] (vgl. auch [12b], S. 130ff.) an, so gewinnt man ein für alle nicht negativen Funktionen $q|E$ erklärtes „*schwaches*" ϱ-Oberintegral $\overline{\int} q\,d\varrho$. Aus diesem leiten sich analog eine Quasi-Norm $N(f) = \overline{\int} |f|\,d\varrho$ über dem System aller Funktionen $f|E$ und ein Integralbegriff ab. Jede im Sinne von STONE ϱ-integrierbare Funktion ist auch im Sinne von BOURBAKI ϱ-integrierbar und die zugehörigen Integrale sind einander gleich. Wenn im folgenden von einer Funktion oder Menge (d.h. also von deren charakteristischen Funktionen) die ϱ-Integrierbarkeit behauptet wird, so kann hierbei, ohne daß dies eigens betont wird, „ϱ-integrierbar" sowohl im Sinne von STONE als auch im Sinne von BOURBAKI verstanden werden. Die Beweise sind dementsprechend angelegt.

[18]) „Bezüglich ϱ Riemann-integrierbar" soll genauer heißen „bezüglich des auf $\mathfrak{K}(E)$ definierten Funktionals $f \to \int f\,d\varrho$ Riemann-integrierbar".

Lemma 2 eine nicht negative Funktion $h_0 \in \mathfrak{R}$ derart, daß für jedes $x \in E$ aus $h_0(x) < 1$ folgt $f(x) = 0$. Nach Lemma 4, angewandt auf $\mathfrak{K}(E)$ an Stelle von $\mathfrak{R}$, folgt die Existenz einer Funktion $h_0' \in \mathfrak{K}(E)$ mit $0 \leqq h_0' \leqq 2\, h_0 \leqq h_0' + 1$. Auch diese Funktion besitzt dann die Eigenschaft, daß aus $h_0'(x) < 1$ stets $f(x) = 0$ folgt. Da f in der Vervollständigung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ bezüglich I liegt, gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leqq g \leqq f \leqq h$ und $I(h-g) \leqq \varepsilon$. Mit f besitzt auch g einen kompakten Träger, d.h. es ist $g \in \mathfrak{K}(E)$. Durch erneute Anwendung von Lemma 4 ergibt sich die Existenz einer Funktion $h' \in \mathfrak{K}(E)$ mit $0 \leqq h' \leqq h \leqq h' + \varepsilon$. Setzt man $g'' = g$ und $h'' = h' - \varepsilon h_0'$, so sind g'' und h'' Funktionen aus $\mathfrak{K}(E)$, nach Wahl von h_0' gilt $g'' \leqq f \leqq h''$ und es ist $\int (h''-g'')\, d\varrho = \int (h'-g)\, d\mu + \varepsilon \int h_0'\, d\mu \leqq I(h-g) + 2\varepsilon I(h_0) \leqq \varepsilon\big(1 + 2I(h_0)\big)$. Also ist f bezüglich ϱ Riemann-integrierbar. Wegen $\int g''\, d\varrho = \int g''\, d\mu$ und $\int h''\, d\varrho = \int h''\, d\mu$ gilt (23) in dem Sinne, daß $\int f\, d\varrho$ das Riemann-Integral von f bezüglich ϱ bedeutet. Nun ist aber $\int (f-g'')\, d\varrho \leqq \int (h''-g'')\, d\varrho$ und $g'' \in \mathfrak{K}(E)$; also ist f auch ϱ-integrierbar und in (23) kann $\int f\, d\varrho$ auch als ϱ-Integral gedeutet werden.

Korollar. *Die Funktionale I $\mathfrak{R}$ und $\int f\, d\varrho \,|\, \mathfrak{K}(E)$ führen zum gleichen an E adaptierten Inhalt, zur gleichen Menge $\mathfrak{Z}$ Riemann-integrierbarer Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über $\mathfrak{Z}$. Es ist $\mathfrak{Z}$ gleich der Vervollständigung von $\mathfrak{K}(E)$ bezüglich ϱ.*

Beweis. Bezeichnet wie bisher $\mathfrak{Z}$ die Menge der bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen, so ist nach Satz 8 $\mathfrak{K}(E) \subseteq \mathfrak{Z}$ und $\int f\, d\varrho = \int f\, d\mu$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(E)$. Da $\mathfrak{Z}$ bezüglich des über $\mathfrak{Z}$ definierten Funktionals $f \to \int f\, d\mu$ vollständig ist, ergibt sich hieraus $\overline{\mathfrak{K}(E)} \subseteq \mathfrak{Z}$, wenn $\overline{\mathfrak{K}(E)}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{K}(E)$ bezüglich ϱ bezeichnet. Es gilt sogar $\overline{\mathfrak{K}(E)} = \mathfrak{Z}$, da nach Satz 8 jede Funktion aus $\mathfrak{Z}$ auch bezüglich ϱ Riemann-integrierbar, also jedenfalls ein Element von $\overline{\mathfrak{K}(E)}$ ist. Aus der Gleichung $\overline{\mathfrak{K}(E)} = \mathfrak{Z}$ und Satz 8 folgt aber der Rest der Behauptung.

Bemerkung. Nach dem zuletzt bewiesenen Korollar bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, die Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen nur für Radonsche Maße zu entwickeln, wie dies Haupt und Pauc in [*10*], [*19*], [*12b*], S. 174ff., für kompakte und in einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit auch für lokal kompakte Räume getan haben. Ausgangspunkt der Untersuchungen von Haupt-Pauc ist dabei allerdings ein an den Raum adaptierter Inhalt. Vermöge der Bemerkung am Beginn der Nr. 3.3 entsprechen sich aber adaptierte Inhalte und positive Radonsche Maße in umkehrbar eindeutiger Weise.

3.4. Da Riemann-Integrierbarkeit bezüglich I dasselbe wie Riemann-Integrierbarkeit bezüglich ϱ bedeutet, ist zu erwarten, daß sich die von Pauc [*19*] für den Fall eines kompakten Raumes angegebene Kennzeichnung der Riemann-integrierbaren Funktionen als fast überall stetige Funktionen auch auf den Fall eines lokal kompakten Raumes übertragen läßt.

Satz 9. *I-quadrierbar sind genau die relativ kompakten Teilmengen Q von E, deren Begrenzung $\overline{Q} - \underline{Q}$ eine ϱ-Nullmenge ist. Riemann-integrierbar*

bezüglich I sind genau die beschränkten, ϱ-fast überall stetigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger[19]).

Beweis. Nach der Adaptionseigenschaft (1) von S. 462 ist eine I-quadrierbare Menge Q stets relativ kompakt; nach der Adaptionseigenschaft (3) ist $\overline{Q}-\underline{Q}\in\mathfrak{Q}$ und $\mu(\overline{Q}-\underline{Q})=0$. Aus Satz 8 folgt daher, daß $\overline{Q}-\underline{Q}$ eine ϱ-Nullmenge ist. Ist umgekehrt Q eine relativ kompakte Menge mit $\varrho(\overline{Q}-\underline{Q})=0$, so existiert zu jedem $\varepsilon>0$ eine offene Menge $U\in\mathfrak{Q}$ mit $\overline{Q}-\underline{Q}\subseteq U$ und $\mu(U)=\varrho(U)\leqq\varepsilon$. Wegen der Vollständigkeit des Inhalts μ folgt hieraus nach HAUPT-PAUC [11], S. 193 die I-Quadrierbarkeit von Q. Damit ist die erste Hälfte der Behauptung bewiesen. — Nunmehr sei f eine bezüglich I Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist jedenfalls f beschränkt, ferner besitzt f einen kompakten Träger, da f im Komplement einer Menge $Q\in\mathfrak{Q}$ gleich Null und Q relativ kompakt ist. Es bezeichne $w(x)$ die Schwankung von f in einem Punkte $x\in E$; für ein $\gamma>0$ sei F_γ die Urbildmenge $[w\geqq\gamma]$. Zu beliebigem $\varepsilon>0$ existieren paarweise fremde Mengen $Q_1,\ldots,Q_n\in\mathfrak{Q}$ sowie reelle Zahlen α_ν,β_ν $(\nu=1,\ldots,n)$ mit $\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\chi_{Q_\nu}\leqq f\leqq\sum_{\nu=1}^{n}\beta_\nu\chi_{Q_\nu}$ und $\sum_{\nu=1}^{n}(\beta_\nu-\alpha_\nu)\,\mu(Q_\nu)\leqq\varepsilon$. Es sei J die Menge aller Indizes $\nu=1,\ldots,n$, für welche der offene Kern $\underline{Q_\nu}$ von Q_ν mit F_γ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Für jeden Punkt $x\in\underline{Q_\nu}\cap F_\gamma$ ist dann $\underline{Q_\nu}$ eine Umgebung von x und daher $\beta_\nu-\alpha_\nu\geqq w(x)\geqq\gamma$; also gilt $\beta_\nu-\alpha_\nu\geqq\gamma$ für jedes $\nu\in J$. Hieraus folgt $\sum_{\nu\in J}\mu(Q_\nu)\leqq\frac{1}{\gamma}\sum_{\nu\in J}(\beta_\nu-\alpha_\nu)\,\mu(Q_\nu)\leqq\frac{\varepsilon}{\gamma}$. Ferner gilt $F_\gamma\subseteq\bigcup_{\nu=1}^{n}\overline{Q_\nu}$, da zu jedem Punkt $x\notin\bigcup_{\nu=1}^{n}\overline{Q_\nu}$ eine Umgebung U von x mit $U\cap\bigcup_{\nu=1}^{n}\overline{Q_\nu}=\emptyset$ existiert und somit $w(x)=0$ ist. Wir erhalten daher die Relation $F_\gamma-\bigcup_{\nu\in J}Q_\nu\subseteq N$, wobei $N=\bigcup_{\nu=1}^{n}(\overline{Q_\nu}-\underline{Q_\nu})$ nach dem ersten Teil des Beweises I-quadrierbar mit $\mu(N)=\varrho(N)=0$ ist. Setzen wir $Q_0=\bigcup_{\nu\in J}Q_\nu$, so ist $F_\gamma\subseteq Q_0\cup N$ und $\mu(Q_0\cup N)=\sum_{\nu\in J}\mu(Q_\nu)\leqq\frac{\varepsilon}{\gamma}$. Wegen der Vollständigkeit des Inhalts $\mu|\mathfrak{Q}$ ist also $F_\gamma\in\mathfrak{Q}$ und $\mu(F_\gamma)=\varrho(F_\gamma)=0$. Da für die Menge F aller Unstetigkeitsstellen von f die Gleichung $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_{1/n}$ gilt, ferner stets $F_{1/n}\subseteq F_{1/n+1}$ ist, so ist F eine ϱ-Nullmenge, also f ϱ-fast überall stetig. — Umgekehrt sei $f|E$ beschränkt, ϱ-fast überall stetig und im Komplement einer kompakten Menge K gleich Null. Nach dem Korollar zu Satz 7 kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit K als I-quadrierbar vorausgesetzt werden. Für ein $\varepsilon>0$ sei F_ε wie oben als Urbildmenge $[w\geqq\varepsilon]$ definiert. Da w oberhalb stetig ist, so ist F_ε abgeschlossen und wegen $F_\varepsilon\subseteq K$ sogar kompakt. Somit ist $\varrho(F_\varepsilon)=0$ und damit auch die Begrenzung von F_ε eine ϱ-Nullmenge,

[19]) In Übereinstimmung mit dem in [17]) Gesagten ist hierbei „ϱ-fast überall stetig" im Sinne der BOURBAKIschen Theorie zu verstehen und heißt: es gilt $\varrho^*(F)=\int^*\chi_F\,d\varrho=0$ für die Menge F aller Unstetigkeitsstellen der betreffenden Funktion f. Der folgende Beweis zeigt, daß F dann sowohl im Sinne von BOURBAKI als auch von STONE ϱ-integrierbar und $\varrho(F)=0$ ist.

da f ϱ-fast überall stetig ist; nach dem bereits bewiesenen ersten Teil der Behauptung ist dann F_ε sogar I-quadrierbar und nach Satz 8 $\mu(F_\varepsilon)=\varrho(F_\varepsilon)=0$. Folglich existiert eine offene Menge $U_0\in\mathfrak{Q}$ mit $\mu(U_0)\leqq\varepsilon$ und $F_\varepsilon\subseteqq U_0$. Für jeden Punkt $x\in K-F_\varepsilon$ ist $w(x)<\varepsilon$; daher existiert eine Umgebung $U_x\in\mathfrak{Q}$ von x, in welcher f um höchstens ε schwankt. Wegen der Kompaktheit von K gibt es endlich viele Punkte $x_1,\ldots,x_n\in K-F_\varepsilon$ derart, daß K von den I-quadrierbaren, offenen Mengen $U_0, U_1=U_{x_1},\ldots,U_n=U_{x_n}$ überdeckt wird. Setzen wir $Q_0=U_0\cap K$, $Q_1=U_1\cap K-Q_0$ und allgemein $Q_\nu=U_\nu\cap K-\bigcup_{\varrho=0}^{\nu-1}Q_\varrho$, so sind die Mengen $Q_0,\ldots,Q_n$ paarweise fremd und I-quadrierbar, ferner ist $K=\bigcup_{\nu=0}^{n}Q_\nu$. Bezeichnet α_ν das Infimum und β_ν das Supremum von f auf Q_ν, $\nu=0,1,\ldots,n$, so gilt $\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu\chi_{Q_\nu}\leqq f\leqq\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\nu\chi_{Q_\nu}$ und $\sum_{\nu=0}^{n}(\beta_\nu-\alpha_\nu)\mu(Q_\nu)\leqq 2M\varepsilon+\varepsilon\sum_{\nu=1}^{n}\mu(Q_\nu)\leqq\varepsilon\left(2M+\mu(K)\right)$; hierbei bedeutet M eine obere Schranke für den Betrag von f auf E. Also ist f Riemann-integrierbar bezüglich I.

3.5. Bislang blieb eine Folgerung aus der Adaption des Inhalts $\mu|\mathfrak{Q}$ an E unberücksichtigt. Nach Haupt-Pauc [11] gilt nämlich: *Ein an E adaptierter Inhalt ist stets σ-additiv.* Es ist also

$$\mu_c=\mu \quad \text{und} \quad \mu_p=0 \tag{24}$$

der σ-additive bzw. rein-endlich-additive Teil von μ. Vermöge der in 2.3 aufgezeigten Koppelung der Zerlegung $\mu=\mu_c+\mu_p$ mit der Zerlegung $I=I_c+I_p$ von I in seinen stetigen Teil I_c und rein-unstetigen Teil I_p lassen sich nunmehr über die Zerlegungsteile I_c und I_p genauere Aussagen machen. Wir benützen hierzu die in § 2 eingeführten Bezeichnungen.

Satz 10. I. *Jede Funktion $f\in\mathfrak{R}$ ist ϱ-integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar; es gilt*

$$I_c(f)=\int f\,d\varrho=\overset{(u)}{\int} f\,d\mu. \tag{25}$$

II. *Es ist $\mathfrak{Q}_c=\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{S}_c=\mathfrak{S}$.*

III. *Es ist $\mathfrak{Q}_p$ das System aller relativ kompakten Teilmengen von E und $\mathfrak{S}_p$ das System aller beschränkten Funktionen $f|E$ mit kompaktem Träger.*

Beweis. *Zu* I. Da $\mu_c=\mu$ ist, folgt aus Satz 5, Beh. I die Gültigkeit der Gleichung $I_c(f)=\overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ für alle $f\in\mathfrak{R}$. Zu zeigen ist also noch, daß jede Funktion $f\in\mathfrak{R}$ ϱ-integrierbar und $\int f\,d\varrho=\overset{(u)}{\int} f\,d\mu$ ist; hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f\geqq 0$ vorausgesetzt werden. Nach dem Lemma 4 (angewandt auf $\mathfrak{R}(E)$ an Stelle von $\mathfrak{R}$) existiert eine nicht fallende Folge $\{g_n\}$ nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{R}(E)$ mit $\sup g_n=f$. Wegen $\int g_n\,d\varrho=\int g_n\,d\mu\leqq\overset{(u)}{\int} f\,d\mu<+\infty$, $n=1,2,\ldots$, ist also f ϱ-integrierbar und $\int f\,d\varrho=\sup\int g_n\,d\varrho\leqq\overset{(u)}{\int} f\,d\mu$. Für eine beliebige Funktion $g\in\mathfrak{S}$ mit $g\leqq f$ ist nach

(23) $\int g\,d\mu = \int g\,d\varrho \leqq \int f\,d\varrho$ und folglich $\overset{(u)}{\int} f\,d\mu \leqq \int f\,d\varrho$. Also ist $\int f\,d\varrho = \overset{(u)}{\int} f\,d\mu$. — *Zu* II. Die Behauptung folgt aus I. und Satz 6, Beh. I. — *Zu* III. Da jede I-quadrierbare Menge relativ kompakt und jede kompakte Menge in einer I-quadrierbaren enthalten ist, folgt die Behauptung aus I. und Satz 6, Beh. II.

Der Satz 10 zeigt, daß es zu jedem *stetigen*, positiven, linearen Funktional $I|\mathfrak{R}$ ein eindeutig bestimmtes, positives Radonsches Maß ϱ auf E gibt, in bezug auf welches $I(f) = \int f\,d\varrho$ für alle Funktionen $f \in \mathfrak{R}$ gilt. Eine erste Kennzeichnung der *rein-unstetigen* Funktionale auf $\mathfrak{R}$ enthält das folgende

Korollar. *Gleichwertig sind folgende drei Aussagen:*

I. *Das Funktional $I|\mathfrak{R}$ ist rein-unstetig.*

II. *Es ist $I(f) = 0$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ mit kompaktem Träger.*

III. *Der Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$ ist identisch Null.*

Beweis. *Aus* I. *folgt* II. Eine Funktion $f \in \mathfrak{R}$ mit kompaktem Träger ist nach Satz 8 Riemann-integrierbar; folglich gilt $\int f\,d\mu = \int f\,d\varrho = I(f)$. Nach Satz 10 gilt aber auch $\int f\,d\varrho = I_c(f)$. Wegen $I_c = 0$ ist also $I(f) = 0$. — *Aus* II. *folgt* III. Für jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ist nach (5) und (6) $\mu(Q) = \sup\big(I(g);\ 0 \leqq g \leqq \chi_Q,\ g \in \mathfrak{R}\big)$. Da Q relativ kompakt ist, besitzt jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leqq g \leqq \chi_Q$ einen kompakten Träger und es ist somit $I(g) = 0$. Hieraus folgt $\mu(Q) = 0$. — *Aus* III. *folgt* I., da nach der Behauptung I des Satzes 10 $I_c = 0$ ist.

Dieses Korollar gestattet nunmehr die Herleitung einer einfachen Formel für die Berechnung von I_p und damit auch von I_c.

Satz 11. *Für jede Funktion $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$ ist*

$$I_p(f) = \lim_{\alpha \to +0} I\big(\min(\alpha, f)\big). \tag{26}$$

Das Funktional I ist dann und nur dann stetig bzw. rein-unstetig, wenn

$$\lim_{\alpha \to +0} I\big(\min(\alpha, f)\big) = 0 \tag{27}$$

bzw.

$$I\big(\min(1, f)\big) = I(f) \tag{28}$$

ist für alle $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{R}$.

Beweis. Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\mathfrak{R}$. Da f im Unendlichen verschwindet, ist die Funktion $g_\alpha = \min(\alpha, f) - f$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ein Element von $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{K}(E)$. Nach dem Korollar zu Satz 10 gilt also $I_p(g_\alpha) = 0$ und somit die Gleichung $I\big(\min(\alpha, f)\big) = I_c\big(\min(\alpha, f)\big) + I_p(f)$ für jedes $\alpha > 0$. Läßt man in dieser Gleichung α gegen $+0$ konvergieren, so folgt (26); wegen der Stetigkeit von I_c ist nämlich $\lim_{\alpha \to +0} I_c\big(\min(\alpha, f)\big) = \lim_{n \to \infty} I_c\Big(\min\Big(\frac{1}{n}, f\Big)\Big) = I_c(0) = 0$. — Aus (26) folgt unmittelbar die Kennzeichnung der stetigen Funktionale durch Gl. (27). — Ist I rein-unstetig, so gilt nach dem Bisherigen $I(g_1) = 0$, also (28). Aus (28) folgt umgekehrt die Gleichung $I\big(\min(\alpha, f)\big) = I(f)$ für jedes $\alpha > 0$ und hieraus $I = I_p$ nach (26).

Wir erhalten als Korollar folgende Aussage über die Möglichkeit einer Integraldarstellung von $I(f)$.

Korollar. *Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\mathfrak{R}$. Dann ist die Bedingung (27) notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichung*

$$I(f) = \int f\, d\varrho = \overset{(u)}{\int} f\, d\mu.$$

Setzen wir $G = [f > 0]$, so ist für das Bestehen dieser Gleichungen dagegen nur hinreichend die Bedingung

$$\sup\big(I(g);\, 0 \leqq g \leqq \chi_G,\, g \in \mathfrak{R}\big) < +\infty\ ^{20}).$$

Beweis. Daß die Bedingung (27) notwendig und hinreichend ist, folgt aus (25) und (26) sowie aus $I = I_c + I_p$. — Es sei $\gamma(G) = \sup\big(I(g);\, 0 \leqq g \leqq \chi_G,\, g \in \mathfrak{R}\big)$. Wegen $0 \leqq \frac{1}{\alpha} \min(\alpha, f) \leqq \chi_G$ ist dann $0 \leqq I\big(\min(\alpha, f)\big) \leqq \alpha\gamma(G)$ für jedes $\alpha > 0$. Hieraus folgt die Bedingung (27).

3.6. *Beispiele rein-unstetiger, positiver, linearer Funktionale.*

1. Der lokal kompakte Raum E sei das halboffene Einheitsintervall $(0, 1] = \{x : 0 < x \leqq 1\}$ der Zahlengeraden, versehen mit der üblichen Topologie. $\mathfrak{R}$ bestehe aus allen stetigen Funktionen $f | [0, 1]$, aufgefaßt als nur auf E definiert, mit $f(0) = 0$ und in $x = 0$ existierender rechtsseitiger Ableitung $f'(0)$. Für jedes $f \in \mathfrak{R}$ sei $I(f) = f'(0)$ [21]).

2. E sei die Halbgerade $[0, +\infty) = \{x : 0 \leqq x < +\infty\}$ mit der üblichen Topologie. $\mathfrak{R}$ bestehe aus allen stetigen Funktionen $f | [0, +\infty)$, für welche $\lim_{x \to +\infty} x f(x)$ (eigentlich) existiert. Für jedes $f \in \mathfrak{R}$ sei $I(f) = \lim_{x \to +\infty} x f(x)$.

Bemerkung. Im Beispiel 2 ist $I(f) = 0 = \int f\, d\varrho = \overset{(u)}{\int} f\, d\mu$ für die spezielle, nicht negative Funktion $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ $(x \in E)$ aus $\mathfrak{R}$; ferner ist $G = [f > 0]$ der Gesamtraum E. Bezeichnet q die Funktion $(1 + x)^{-1}$ aus $\mathfrak{R}$, so ist für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ die Funktion $g_\alpha = \min(1, \alpha q)$ ein Element von $\mathfrak{R}$ und $0 \leqq g_\alpha \leqq 1$. Wegen $I(g_\alpha) = \alpha$ ist folglich $\sup\big(I(g);\, 0 \leqq g \leqq \chi_G,\, g \in \mathfrak{R}\big) = +\infty$. Die im Korollar zu Satz 11 genannte hinreichende Bedingung ist also nicht notwendig.

§ 4. Zurückführung des abstrakten Falles auf den konkreten

4.1. Im letzten Paragraphen ergab sich unter anderem, daß unter den dort gemachten speziellen Annahmen über E und $\mathfrak{R}$ zu jedem positiven, linearen Funktional $I | \mathfrak{R}$ ein Radonsches Maß ϱ auf E derart existiert, daß die Theorie des Riemann-Integrals bezüglich I mit der bezüglich ϱ identisch ist. Es bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit, im konkreten Fall eines lokal kompakten Raumes den Standpunkt von Haupt und Pauc einzunehmen. In den folgenden Betrachtungen wird dieses Ergebnis dahingehend verschärft, daß die Loomissche Theorie des Riemann-Integrals selbst

[20]) Vgl. auch Satz 16.

[21]) Nach Loomis [*14*], S. 174, wo das Beispiel aber nicht in unserem Sinne interpretiert wird.

im abstrakten Fall keinen wesentlichen Gewinn an Allgemeinheit gegenüber dem konkreten Fall bringt. Wir behaupten nämlich: Ist E eine Menge und $\mathfrak{R}$ ein System von beschränkten Funktionen $g|E$ mit den Eigenschaften (1) bis (3) sowie (21) und (22), so existiert ein lokal kompakter Raum $E'_{\mathfrak{R}}$, der E als dichte Teilmenge enthält, mit folgender Eigenschaft: Zu jedem positiven, linearen Funktional $I|\mathfrak{R}$ gibt es ein positives Radonsches Maß ϱ' auf $E'_{\mathfrak{R}}$ derart, daß eine Funktion $f|E$ dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I ist, wenn sie zu einer bezüglich ϱ' Riemann-integrierbaren Funktion $f'|E'_{\mathfrak{R}}$ fortgesetzt werden kann; für jede solche Fortsetzung f' von f ist $\int f\,d\mu = \int f'\,d\varrho'$.

4.2. Es liege der abstrakte Fall des § 1 vor: E sei eine Menge, $\mathfrak{R}$ ein System auf E definierter, reeller Funktionen mit den Eigenschaften (1) bis (3) und $I|\mathfrak{R}$ ein positives, lineares Funktional. Wir behaupten zunächst, daß es im Hinblick auf die Loomissche Theorie des Riemann-Integrals keine wesentliche Einschränkung bedeutet, über $\mathfrak{R}$ folgende drei Zusatz-Voraussetzungen zu machen: 1. *Jede Funktion aus* $\mathfrak{R}$ *ist beschränkt*; 2. *es besitzt* $\mathfrak{R}$ *die Eigenschaft* (21); 3. *es besitzt* $\mathfrak{R}$ *die Eigenschaft* (22).

Zu 1. Die Teilmenge $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ aller beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{R}$ genügt den Bedingungen (1) bis (3). Bezeichnet $I^*|\mathfrak{R}^*$ die Verengerung von I auf $\mathfrak{R}$, so führen die Funktionale $I|\mathfrak{R}$ und $I^*|\mathfrak{R}^*$ zum gleichen System $\mathfrak{Q}$ quadrierbarer Mengen, zum gleichen Inhalt $\mu|\mathfrak{Q}$, zum gleichen System $\mathfrak{S}$ Riemann-integrierbarer Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über $\mathfrak{S}$. Zum Beweis sei Q eine I-quadrierbare Menge und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann existieren Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q \leq h$ und $I(h-g) \leq \varepsilon$. Setzen wir $h^* = \min(1, h)$, so sind g und h^* Funktionen aus $\mathfrak{R}^*$ mit $0 \leq g \leq \chi_Q \leq h^* \leq h$ und $I^*(h^*-g) \leq I(h-g) \leq \varepsilon$. Also ist Q auch I^*-quadrierbar. Trivial ist, daß umgekehrt eine I^*-quadrierbare Menge auch I-quadrierbar ist. Da in die Definition des Inhalts $\mu|\mathfrak{Q}$ nur Funktionen aus $\mathfrak{R}^*$ eingehen, führen I und I^* zum gleichen Inhalt μ. Hieraus folgt aber der Rest der Behauptung.

Zu 2. Es bezeichne E_0 die Menge aller Elemente $x \in E$ mit $g(x) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{R}$. Aus der Definition der Vervollständigung $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ bezüglich I folgt, daß jede Funktion $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ auf E_0 gleich Null ist. Hieraus folgt insbesondere, daß jede quadrierbare Menge Q zu E_0 fremd und jede Riemann-integrierbare Funktion auf E_0 gleich Null ist. Es genügt daher, die Funktionen $g \in \mathfrak{R}$ nur auf dem verengerten Definitionsbereich $E - E_0$ zu betrachten. (Den Trivialfall, in welchem $E - E_0$ die leere Menge ist, also $\mathfrak{R}$ nur aus der konstanten Funktion $g = 0$ besteht, können wir unberücksichtigt lassen.)

Zu 3. Es bezeichne R die folgende Äquivalenzrelation in E: Zwei Elemente $x, y \in E$ heißen äquivalent, wenn $g(x) = g(y)$ ist für jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$. Es sei $E^* = E/R$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich R; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir E^* als eine Teilmenge von E annehmen, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Punkt als Repräsentanten enthält. Das System $\mathfrak{R}^*$ der auf E^* verengerten Funktionen aus $\mathfrak{R}$

besitzt neben den Eigenschaften (1) bis (3) auch die Eigenschaft (22) auf E^*. Wir übertragen das Funktional I auf $\mathfrak{R}^*$ und erhalten ein positives, lineares Funktional $I^*|\mathfrak{R}^*$. Dann gilt: Eine Funktion $f^* E^*$ liegt dann und nur dann in der Vervollständigung von $\mathfrak{R}^*$ bezüglich I^*, wenn sie zu einer in der Vervollständigung $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ bezüglich I gelegenen Funktion $f|E$ fortgesetzt werden kann. Die Fortsetzung $f \in \bar{\mathfrak{R}}$ von f^* kann so gewählt werden, daß f auf jeder Äquivalenzklasse bezüglich R konstant ist. Hieraus folgt, daß eine Menge $Q^* \subseteq E^*$ dann und nur dann I^*-quadrierbar ist, wenn eine I-quadrierbare Menge $Q \subseteq E$ mit $Q^* = Q \cap E$ existiert; bezeichnet μ^* den sich aus I^* ableitenden Inhalt, so ist $\mu^*(Q^*) = \mu(Q)$. Es folgt weiter, daß eine Funktion $f^*|E^*$ dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I^* ist, wenn sie zu einer bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktion $f|E$ fortgesetzt werden kann; es gilt dann $\int f^* d\mu^* = \int f \, d\mu$.

4.3. Von nun an genüge $\mathfrak{R}$ neben (1) bis (3) auch noch den in 4.2 genannten drei Zusatz-Voraussetzungen. Dann behaupten wir:

Satz 12. *Zu E und $\mathfrak{R}$ existiert ein lokal kompakter Raum $E'_{\mathfrak{R}}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(29) *E ist eine dichte Teilmenge von $E'_{\mathfrak{R}}$;*

(30) *jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ kann (auf genau eine Weise) zu einer auf $E'_{\mathfrak{R}}$ stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion g' fortgesetzt werden;*

(31) *die Menge $\mathfrak{R}'$ der stetigen Fortsetzungen g' aller Funktionen $g \in \mathfrak{R}$ besitzt auf $E'_{\mathfrak{R}}$ die Trennungseigenschaften* (21) *und* (22)[22].

Beweis. Nach dem Lemma 1 ist die Menge $\mathfrak{A}_0$ aller (beschränkten) Funktionen auf E, die durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden können, eine hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene Algebra. Die kleinste, $\mathfrak{A}_0$ umfassende Algebra $\mathfrak{A}$, welche auch die auf E konstanten Funktionen enthält, besteht dann genau aus den Funktionen $f = \alpha + f_0$, wobei α eine reelle Zahl und $f_0 \in \mathfrak{A}_0$ ist. Wir behaupten, daß auch $\mathfrak{A}$ hinsichtlich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist. Wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0$ ist, also $\mathfrak{A}_0$ die auf E konstanten Funktionen enthält, ist dies trivial. Wir können daher annehmen, daß $f = 0$ die einzige konstante Funktion in $\mathfrak{A}_0$ ist. Es sei $\{f_n\}$ eine gegen eine Funktion $f|E$ gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen aus $\mathfrak{A}$; jedes f_n kann in der Form $f_n = \alpha_n + f_n^0$ mit $\alpha_n \in \mathsf{P}$ und $f_n^0 \in \mathfrak{A}_0$ dargestellt werden. Ist α ein Limeswert der Folge $\{\alpha_n\}$, so existiert eine gegen α konvergente Teilfolge $\{\alpha_{n_\nu}\}$; folglich konvergiert $\{f_{n_\nu}^0\}$ gleichmäßig gegen $f - \alpha$, d.h. es ist $f - \alpha \in \mathfrak{A}_0$. Für einen zweiten Limeswert β von $\{\alpha_n\}$ folgt entsprechend $f - \beta \in \mathfrak{A}_0$. Also sind α, β endlich und die konstante Funktion $\alpha - \beta = (f - \beta) - (f - \alpha)$ liegt in $\mathfrak{A}_0$; gemäß unserer Annahme über $\mathfrak{A}_0$ ist also $\alpha = \beta$, d.h. es existiert der Grenzwert der Folge $\{\alpha_n\}$ und zwar ist $\alpha = \beta = \lim \alpha_n$. Dann konvergiert aber auch die Folge $\{f_n^0\}$ gleichmäßig auf E gegen eine Grenzfunktion $f_0 \in \mathfrak{A}_0$ und es ist $f = \alpha + f_0 \in \mathfrak{A}$. Auf Grund der festgestellten

[22] In (21) und (22) sind also E und $\mathfrak{R}$ sinngemäß durch $E'_{\mathfrak{R}}$ und $\mathfrak{R}'$ zu ersetzen.

Eigenschaften von $\mathfrak{A}$ existiert nach GELFAND und ŠILOV [9][23]) ein kompakter Raum E'', welcher E als dichte Teilmenge enthält und auf welchen die Funktionen aus $\mathfrak{A}$ und nur diese stetig fortgesetzt werden können. Es bezeichne $\mathfrak{R}''$ bzw. $\mathfrak{A}_0''$ bzw. $\mathfrak{A}''$ die Menge der auf E'' stetig fortgesetzten Funktionen aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{A}_0$ bzw. $\mathfrak{A}$; dann ist $\mathfrak{A}''$ die Menge aller stetigen Funktionen auf E''. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens. Es sei $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0$, d.h. es enthalte $\mathfrak{A}_0$ die auf E konstanten Funktionen. Dann ist E'' selbst ein Raum $E'_{\mathfrak{R}}$. Die Trennungseigenschaften (21) und (22) sind auf E'' erfüllt, da jede auf E'' stetige, reelle Funktion durch Funktionen aus $\mathfrak{R}''$ zunächst auf E und wegen der Dichtigkeit von E in E'' dann auf ganz E'' gleichmäßig approximiert werden kann. Zweitens. Es sei $\mathfrak{A}\neq\mathfrak{A}_0$, d.h. $\mathfrak{A}_0$ enthalte $f=0$ als einzige auf E konstante Funktion. In diesem Falle ist $\mathfrak{A}_0''$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{A}''$. Nach STONE [20][24]) existiert folglich ein eindeutig bestimmter Punkt p_0'' in E'' derart, daß $\mathfrak{A}_0''$ die Menge aller stetigen Funktionen $f''|E''$ mit $f''(p_0'')=0$ ist. Der Unterraum $E'=E''-(p_0'')$ von E'' ist dann ein Raum $E'_{\mathfrak{R}}$. Die Trennungseigenschaften (21) und (22) ergeben sich auf Grund der gleichen Bemerkung wie im bereits erledigten Falle. Damit ist der Satz 12 vollständig bewiesen[25]).

Bemerkung. Aus dem Beweis des Satzes 12 (und wegen Satz 13 natürlich auch aus den Eigenschaften (29) bis (31) von $E'_{\mathfrak{R}}$) folgt, daß $E'_{\mathfrak{R}}$ *dann und nur dann kompakt* ist, wenn die konstante Funktion $g=1$ durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden kann, also wegen (3) in $\mathfrak{R}$ liegt.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir

Satz 13. *Der Raum $E'_{\mathfrak{R}}$ ist durch die Eigenschaften* (29) *bis* (31) *bis auf Homöomorphien, welche E punktweise festlassen, eindeutig bestimmt.*

Beweis. Es seien E_1' und E_2' zwei Räume $E'_{\mathfrak{R}}$. Wir setzen $E_i''=E_i'$, falls E_i' kompakt ist; andernfalls sei E_i'' die durch Adjunktion des unendlich fernen Punktes w_i entstehende Alexandroffsche Kompaktifizierung von E_i'. In jedem Falle ist E_i'' ein kompakter Raum, in dem E dicht liegt und auf den jede stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion $f'|E_i'$ stetig fortgesetzt werden kann; insbesondere können die Funktionen aus $\mathfrak{R}$ auf E_i'' stetig fortgesetzt werden. Aus den Eigenschaften von E_i' und aus Lemma 4 folgt dann, daß jede stetige Funktion $f''|E_i''$ eine Darstellung $f''=\alpha+f_0''$ besitzt, wobei α eine reelle Zahl ist und f_0'' durch auf E_i'' stetig fortgesetzte Funktionen aus $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximiert werden kann ($i=1, 2$). Daher kann jede beschränkte Funktion $f|E$, die zu einer auf E_1'' stetigen Funktion fortgesetzt werden kann, auch zu einer auf E_2'' stetigen Funktion fortgesetzt werden und umgekehrt. Nach STONE [20][26]) folgt hieraus die Existenz einer Homöomorphie ψ von E_1'' auf E_2'', welche E punktweise festläßt. Da E in E_1'' und E_2'' dicht liegt, gilt

[23]) Vgl. hierzu auch NÖBELING und BAUER [16], S. 34 und 35.

[24]) Vgl. hierzu S. 25 der in [23]) zitierten Arbeit.

[25]) Einen anderen, nur einfache topologische Hilfsmittel verwendenden Beweis hat Verf. in [17], S. 65—67 gegeben.

[26]) Vgl. auch [16], S. 28.

dann $f_1''=f_2''\circ\psi$ für jede Funktion $f|E$, die zu einer stetigen Funktion $f_1''|E_1''$ und zu einer stetigen Funktion $f_2''|E_2''$ fortgesetzt werden kann. Ist E_1' nicht kompakt, so folgt hieraus $0=f_1''(w_1)=f_2''(\psi(w_1))$ für jedes $f\in\mathfrak{R}$; wegen (31) ist also auch E_2' nicht kompakt, vielmehr gilt $w_2=\psi(w_1)$. Durch Vertauschung der Rollen von E_1' und E_2' folgt, daß umgekehrt mit E_1' auch E_2' kompakt ist. Damit ist gezeigt, daß ψ in jedem Falle E_1' auf E_2' homöomorph abbildet. Auch die auf E_1' verengerte Homöomorphie ψ läßt E punktweise fest.

Der Satz 13 berechtigt uns, fernerhin von *dem* Raum $E_{\mathfrak{R}}'$ zu sprechen. Ist (wie in § 3) E selbst ein lokal kompakter Raum und $\mathfrak{R}$ ein System stetiger, im Unendlichen verschwindender Funktionen auf E mit den Eigenschaften (1) bis (3) sowie (21) und (22), so ist $E_{\mathfrak{R}}'=E$.

Die aus Nr. 1.5 bekannte Bedingung (8) für $\mathfrak{R}$ erfährt jetzt eine einfache und neue Deutung.

Satz 14. *Die Funktionenmenge $\mathfrak{R}$ genügt (unter den bisherigen Annahmen) dann und nur dann der Bedingung* (8), *wenn die stetige Fortsetzung $g'|E_{\mathfrak{R}}'$ einer jeden Funktion $g\in\mathfrak{R}$ einen kompakten Träger besitzt.*

Beweis. Es genüge $\mathfrak{R}$ der Bedingung (8). Dann existiert zu beliebigem $g\in\mathfrak{R}$ eine nicht negative Funktion $h\in\mathfrak{R}$ derart, daß für jedes $x\in E$ aus $h(x)<1$ folgt $g(x)=0$. Bezeichnet g' bzw. h' die stetige Fortsetzung von g bzw. h auf $E_{\mathfrak{R}}'$, so folgt, da E in $E_{\mathfrak{R}}'$ dicht liegt, sogar für jedes $x'\in E_{\mathfrak{R}}'$ aus $h'(x')<1$ stets $g'(x')=0$. Da $h'\geqq 0$ ist und im Unendlichen verschwindet, ist $[h'\geqq 1]$ eine kompakte Menge. g' ist im Komplement dieser Menge gleich Null und besitzt daher einen kompakten Träger. — Umgekehrt sei der Träger $T(g')$ der stetigen Fortsetzung $g'|E_{\mathfrak{R}}'$ einer Funktion $g\in\mathfrak{R}$ kompakt. Dann gibt es eine nicht negative, stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion $t'|E_{\mathfrak{R}}'$ mit $t'(x')=1$ für alle $x'\in T(g')$. Wegen (31) und Lemma 4 existiert zu t' eine nicht negative Funktion $h\in\mathfrak{R}$ derart, daß für deren stetige Fortsetzung $h'|E_{\mathfrak{R}}'$ gilt $0\leqq\frac{1}{2}h'\leqq t'\leqq\frac{1}{2}h'+\frac{1}{2}$. Diese Funktion h leistet bezüglich g das in (8) Verlangte: Aus $h(x)<1$ für ein $x\in E$ folgt $t'(x)<1$; also ist $x\notin T(g')$ und somit $g(x)=g'(x)=0$. Die Bedingung (8) ist also erfüllt.

4.4. Der Raum $E_{\mathfrak{R}}'$ wurde unabhängig von dem auf $\mathfrak{R}$ definierten Funktional I definiert. Erst jetzt beziehen wir I in unsere Betrachtungen mit ein. Für eine beliebige Funktion $g\in\mathfrak{R}$ bezeichne im folgenden g' deren eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf $E_{\mathfrak{R}}'$; $\mathfrak{R}'$ sei die Menge der Fortsetzungen g' aller Funktionen $g\in\mathfrak{R}$. Wir übertragen I auf $\mathfrak{R}'$ durch die Festsetzung

$$I'(g')=I(g)\qquad(g\in\mathfrak{R}).\tag{32}$$

Dann ist auch $I'|\mathfrak{R}'$ ein positives, lineares Funktional. Da E in $E_{\mathfrak{R}}'$ dicht liegt, genügt auch $\mathfrak{R}'$ den Bedingungen (1) bis (3) für $\mathfrak{R}$; nach Satz 12 besitzt daher $\mathfrak{R}'$ bezüglich $E_{\mathfrak{R}}'$ alle Eigenschaften, die in § 3 $\mathfrak{R}$ bezüglich E hatte. Also sind die Resultate des § 3 auf $E_{\mathfrak{R}}'$, $\mathfrak{R}'$ und I' an Stelle von E, $\mathfrak{R}$ und I anwendbar. Es bezeichne $\mu'|\mathfrak{L}'$ den sich aus I' ableitenden, an $E_{\mathfrak{R}}'$ adaptierten Inhalt und ϱ' das eindeutig bestimmte positive Radonsche Maß auf $E_{\mathfrak{R}}'$, in

bezug auf welches alle Mengen $Q' \in \mathfrak{Q}'$ ϱ'-integrierbar mit $\varrho'(Q') = \mu'(Q')$ sind. Dann ist $\mathfrak{Q}'$ nach dem Korollar zu Satz 8 auch das System der ϱ'-quadrierbaren Mengen. Nach dem gleichen Korollar ist die Menge $\mathfrak{E}'$ der bezüglich I' Riemann-integrierbaren Funktionen gleich der Menge der bezüglich ϱ' Riemann-integrierbaren Funktionen. Es gilt nun der einleitend bereits angekündigte

Satz 15. I. *Eine Menge $Q \subseteq E$ ist dann und nur dann I-quadrierbar, wenn eine ϱ'-quadrierbare Menge $Q' \subseteq E'_{\mathfrak{R}}$ existiert mit $Q = Q' \cap E$. Für je zwei Mengen $Q \in \mathfrak{Q}$ und $Q' \in \mathfrak{Q}'$ mit $Q = Q' \cap E$ ist $\mu(Q) = \mu'(Q') = \varrho'(Q')$.*

II. *Eine reelle Funktion $f|E$ ist dann und nur dann Riemann-integrierbar bezüglich I, wenn sie zu einer bezüglich ϱ' Riemann-integrierbaren Funktion $f'|E'_{\mathfrak{R}}$ fortgesetzt werden kann. Für je zwei Funktionen $f \in \mathfrak{E}$ und $f' \in \mathfrak{E}'$, von denen die zweite eine Fortsetzung der ersten ist, gilt $\int f \, d\mu = \int f' \, d\mu' = \int f' \, d\varrho'$.*

Beweis. *Zu* I. Es sei $Q' \in \mathfrak{Q}'$; wir behaupten die I-Quadrierbarkeit der Menge $Q = Q' \cap E$ und die Gültigkeit der Gleichung $\mu(Q) = \mu'(Q')$ $(= \varrho'(Q'))$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existieren Funktionen $g', h' \in \mathfrak{R}'$ mit $g' \leq \chi'_{Q'} \leq h'$ [27]) und $I'(h' - g') \leq \varepsilon$. Für die zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Verengerungen g und h von g' und h' auf E ist dann $g \leq \chi_Q \leq h$ und $I(h - g) \leq \varepsilon$. Also ist $Q \in \mathfrak{Q}$; ferner gilt $\mu(Q) = \mu'(Q')$ nach (6) und (32). - Umgekehrt sei $Q \subseteq E$ I-quadrierbar; zu zeigen ist die Existenz einer Menge $Q' \in \mathfrak{Q}'$ mit $Q = Q' \cap E$. Für Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ folgt aus $g \leq \chi_Q \leq h$ stets $g' \leq \chi'_Q \leq h'$ für die stetigen Fortsetzungen g' und h' von g und h auf $E'_{\mathfrak{R}}$ und die abgeschlossene Hülle $\overline{Q}$ von Q in $E'_{\mathfrak{R}}$. Setzen wir $Q' = Q \cup (\overline{Q} - E)$, so gilt auch $g' \leq \chi'_{Q'} \leq h'$. Die Menge Q' leistet daher das Verlangte.

Zu II. Es sei f' eine Funktion aus $\mathfrak{E}'$ und f die Verengerung von f' auf E. Zu $\varepsilon > 0$ existieren dann Mengen $Q'_1, \ldots, Q'_n \in \mathfrak{Q}'$ und reelle Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ derart, daß $g' = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi'_{Q'_\nu} \leq f' \leq \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \chi'_{Q'_\nu} = h'$ und $\sum_{\nu=1}^{n} (\beta_\nu - \alpha_\nu) \mu'(Q'_\nu) \leq \varepsilon$ ist. Für die auf E definierten Funktionen $g = \sum \alpha_\nu \chi_{Q_\nu}$ und $h = \sum \beta_\nu \chi_{Q_\nu}$ mit $Q_\nu = Q'_\nu \cap E$, $\nu = 1, \ldots, n$, gilt folglich $g \leq f \leq h$ sowie $\sum (\beta_\nu - \alpha_\nu) \mu(Q_\nu) \leq \varepsilon$. Also ist $f \in \mathfrak{E}$. Da $\mu(Q_\nu) = \mu'(Q'_\nu)$ ist folgt ferner noch $\int f \, d\mu = \int f' \, d\mu'$ $(= \int f' \, d\varrho')$. Umgekehrt sei f eine Funktion aus $\mathfrak{E}$; wir beweisen die Existenz einer in $\mathfrak{E}'$ gelegenen Fortsetzung f' von f auf $E'_{\mathfrak{R}}$. Da jede Funktion aus $\mathfrak{E}$ gleich der Differenz zweier nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{E}$ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \geqq 0$ annehmen. Wie in 1.4 bezeichne $\mathfrak{E}$ die Menge aller $\mathfrak{Q}$-Treppenfunktionen; entsprechend sei $\mathfrak{E}'$ die Menge aller $\mathfrak{Q}'$-Treppenfunktionen (auf E'). Zu f existieren zwei Folgen $\{g_n\}_{n=1,2,\ldots}$ und $\{h_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Funktionen aus $\mathfrak{E}$ derart, daß $0 \leq g_1 \leq \cdots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \cdots \leq f \leq \cdots \leq h_{n+1} \leq h_n \leq \cdots \leq h_1$ und $\int (h_n - g_n) \, d\mu \leq 1/n$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt. Es genügt zu zeigen, daß jede Funktion g_n bzw. h_n zu einer Funktion g'_n bzw. h'_n aus $\mathfrak{E}'$ fortgesetzt werden kann, und zwar so, daß $g'_n \leq g'_{n+1} \leq h'_{n+1} \leq h'_n$

[27]) Im folgenden bezeichnet χ_A die auf E definierte, charakteristische Funktion einer Menge $A \subseteq E$ und χ'_A die auf $E'_{\mathfrak{R}}$ definierte, charakteristische Funktion einer Menge $A' \subseteq E'_{\mathfrak{R}}$.

und $\int (h'_n - g'_n)\, d\mu' = \int (h_n - g_n)\, d\mu$ für jedes n ist. Dann folgt nämlich $\sup g'_n(x') \leqq \inf h'_n(x')$ für jeden Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}}$. Um also zu einer in $\mathfrak{Z}'$ gelegenen Fortsetzung f' von f auf $E'_{\mathfrak{R}}$ zu gelangen, braucht man für einen beliebigen Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}} - E$ als Funktionswert $f'(x')$ nur eine reelle Zahl ξ mit $\sup g'_n(x') \leqq \xi \leqq \inf h'_n(x')$ zu wählen. Die Existenz der Fortsetzungen g'_n und h'_n ergibt sich folgendermaßen. Jeder Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ordnen wir die Menge $Q' = Q \cup (\overline{Q} - E)$ zu, wobei wieder $\overline{Q}$ die abgeschlossene Hülle von Q in $E'_{\mathfrak{R}}$ bedeutet; nach dem Beweis der Behauptung I ist $Q' \in \mathfrak{Q}'$, $Q' \cap E = Q$ und $\mu'(Q') = \mu(Q)$. Ist g eine beliebige nicht negative Funktion aus $\mathfrak{E}$ und $g = \sum \lambda_\nu \chi_{Q_\nu}$ eine ihrer Darstellungen mit paarweise fremden Mengen $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathfrak{Q}$, so setzen wir sie zu einer nicht negativen Funktion $g' | E'_{\mathfrak{R}}$ wie folgt fort: Für einen Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}} - E$ setzen wir $g'(x') = 0$, falls x' in keiner der Mengen $Q'_1, \ldots, Q'_n$ liegt; liegt dagegen x' in $Q'_{\nu_1}, \ldots, Q'_{\nu_r}$, $\nu_1 < \cdots < \nu_r$, aber in keiner weiteren Menge Q'_ν, so setzen wir $g'(x') = \max(\lambda_{\nu_1}, \ldots, \lambda_{\nu_r})$. Für den Beweis der Unabhängigkeit der so definierten Fortsetzung g' von der gewählten Darstellung von g seien $g = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \chi_{A_\mu}$ und $g = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \chi_{B_\nu}$ zwei Darstellungen von g mit paarweise fremden Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{Q}$ bzw. $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{Q}$; ferner sei x' ein Punkt von $E'_{\mathfrak{R}} - E$. Wir beweisen zuerst folgende einfache Bemerkung. Liegt x' in B'_ν, ist $\beta_\nu \neq 0$ und sind $A_{\mu_1}, \ldots, A_{\mu_r}$ genau die zu B_ν nicht fremden Mengen unter den $A_1, \ldots, A_m$, so liegt x' in einer der Mengen $A'_{\mu_1}, \ldots, A'_{\mu_r}$ und es ist $\beta_\nu = \alpha_{\mu_1} = \cdots = \alpha_{\mu_r}$. Wegen $x' \in B'_\nu$ ist nämlich $B_\nu \neq \emptyset$ und wegen $\beta_\nu \neq 0$ existiert folglich wenigstens ein A_μ mit $A_\mu \cap B_\nu \neq \emptyset$; da g auf A_μ und B_ν konstant ist, so ist also $\alpha_\mu = \beta_\nu$ für jedes μ mit $A_\mu \cap B_\nu \neq \emptyset$. Um die Gleichheit der Funktionswerte $g'(x')$ nachzuweisen, die man ausgehend von der einen bzw. anderen Darstellung von g erhält, genügt es, die beiden folgenden Fälle zu betrachten. 1. Fall. Es liegt x' in keiner der Mengen $A'_1, \ldots, A'_m$. 2. Fall. Es liegt x' in den Mengen $A'_{\mu_1}, \ldots, A'_{\mu_k}$ und $B'_{\nu_1}, \ldots, B'_{\nu_l}$, aber in keiner weiteren Menge unter den $A'_1, \ldots, A'_m$ bzw. $B'_1, \ldots, B'_n$. Im ersten Falle folgt aus der vorangestellten Bemerkung, daß x' höchstens in Mengen B'_ν mit $\beta_\nu = 0$ liegt. Im zweiten Falle folgt aus der gleichen Bemerkung, daß jedes von Null verschiedene $\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_k}$ unter den $\beta_{\nu_1}, \ldots, \beta_{\nu_l}$ und umgekehrt jedes von Null verschiedene $\beta_{\nu_1}, \ldots, \beta_{\nu_l}$ unter den $\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_k}$ auftritt. Da g und damit alle Koeffizienten α_μ, β_ν, die zu nicht leeren Mengen Q_μ, Q_ν gehören, nicht negativ sind, führen also in beiden Fällen beide Darstellungen von g zum gleichen Funktionswert $g'(x')$. Weiter behaupten wir, daß g' eine Funktion aus $\mathfrak{E}'$ ist. Hierzu sei $g = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{Q_\nu}$ eine Darstellung von g; die Mengen $Q_\nu \in \mathfrak{Q}$ seien wieder paarweise fremd und es sei $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Wir setzen $Q' = \bigcup_{\nu=1}^{n} Q'_\nu$ und $\tilde{Q}'_\nu = Q' - Q'_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$; dann sind Q' und $\tilde{Q}'_\nu$ Mengen aus $\mathfrak{Q}'$. Die Urbildmenge $U'_\nu = [g' = \lambda_\nu]$ ist definitionsgemäß für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ gleich $Q'_\nu \cap \tilde{Q}'_{\nu+1} \cap \cdots \cap \tilde{Q}'_n$, also ein Element von $\mathfrak{Q}'$. Da g' nur die Werte $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ annehmen kann, ist $g' = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{U'_\nu}$

und somit $g' \in \mathfrak{E}'$. Wegen $U_\nu' \cap E = Q_\nu$ gilt nach Behauptung I ferner $\mu'(U_\nu') = \mu(Q_\nu)$ für jedes ν und somit $\int g' d\mu' = \int g \, d\mu$. Schließlich zeigen wir, daß aus $0 \leq g \leq h$, $g, h \in \mathfrak{E}$, stets $g' \leq h'$ folgt. Hierzu wählen wir in $\mathfrak{Q}$ paarweise fremde Mengen $Q_1, \ldots, Q_n$, so daß $g = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \chi_{Q_\nu}$ und $h = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \chi_{Q_\nu}$ ist. Dann gilt $\alpha_\nu \leq \beta_\nu$ für jedes ν mit $Q_\nu \neq \emptyset$ und aus der Definition von g' und h' folgt sofort $g' \leq h'$. Wendet man das beschriebene Verfahren der Fortsetzung nicht negativer Funktionen aus $\mathfrak{E}$ zu nicht negativen Funktionen aus $\mathfrak{E}'$ auf die Funktionen g_n und h_n an, so erhält man Fortsetzungen g_n', $h_n' \in \mathfrak{E}'$ mit den gewünschten Eigenschaften. Also ist nunmehr auch die Behauptung II vollständig bewiesen.

Korollar. *Für jede Funktion* $f \in \mathfrak{R}$ *ist* $\overset{(u)}{\int} f \, d\mu = \overset{(u)}{\int} f' \, d\mu' = \int f' \, d\varrho'$.

Beweis. Nach Satz 10 ist $\overset{(u)}{\int} f' \, d\mu' = \int f' \, d\varrho'$. Es genügt also die Gleichung $\overset{(u)}{\int} f \, d\mu = \overset{(u)}{\int} f' \, d\mu'$ und diese wiederum nur für nicht negative Funktionen $f \in \mathfrak{R}$ zu beweisen. Für ein $f \geq 0$ aus $\mathfrak{R}$ sei g eine Funktion aus $\mathfrak{E}$ mit $0 \leq g \leq f$. Ist $g' \in \mathfrak{E}'$ eine Fortsetzung von g auf $E_{\mathfrak{R}}'$, so ist deren Positivteil $g'^{+} \in \mathfrak{E}'$ und eine nicht negative Fortsetzung von g auf $E_{\mathfrak{R}}'$; nach (11) ist dann $g'^{*} = \min(g'^{+}, f')$ ein Element von $\mathfrak{E}'$ sowie eine Fortsetzung von g auf $E_{\mathfrak{R}}'$ mit $0 \leq g'^{*} \leq f'$. Nach Satz 15 ist daher die Menge der auf E verengerten Funktionen $g' \in \mathfrak{E}'$ mit $0 \leq g' \leq f'$ identisch mit der Menge aller Funktionen $g \in \mathfrak{E}$ mit $0 \leq g \leq f$. Aus der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals und Satz 15 folgt daher $\overset{(u)}{\int} f \, d\mu = \overset{(u)}{\int} f' \, d\mu'$.

4.5. Das in § 3 bewiesene Korollar zu Satz 11 über die Darstellbarkeit von $I(f)$ durch ein Integral läßt sich jetzt wie folgt verallgemeinern.

Satz 16. *Für eine nicht negative Funktion* $f \in \mathfrak{R}$ *bestehen die Gleichungen*

$$I(f) = \overset{(u)}{\int} f \, d\mu = \overset{(u)}{\int} f' \, d\mu' = \int f' \, d\varrho' \tag{33}$$

dann und nur dann, wenn

$$\lim_{\alpha \to +0} I(\min(\alpha, f)) = 0 \tag{34}$$

ist. Die Bedingung (34) *ist insbesondere dann erfüllt, wenn für die Menge* G *aller Elemente* $x \in E$ *mit* $f(x) > 0$

$$\sup(I(g); 0 \leq g \leq \chi_G, g \in \mathfrak{R}) < +\infty \tag{35}$$

ist[28]).

Beweis. Da $\min(\alpha, f')$ die Funktion $\min(\alpha, f)$ auf $E_{\mathfrak{R}}'$ stetig fortsetzt, folgt die Gleichwertigkeit von (33) und (34) aus den Korollaren zu den

[28]) Ist f eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{R}$, so ist die gleiche Bedingung (35) hinreichend für die Gültigkeit der Gln. (33), wenn hierbei G als Menge aller $x \in E$ mit $|f(x)| > 0$ definiert wird.

Sätzen 11 und 15. Daß aus (35) die Gl. (34) folgt, wurde bereits im Beweis des Korollars zu Satz 11 gezeigt.

Bemerkungen. 1. Durch Satz 16 haben wir auf anderem Wege ein Resultat von Loomis [14], S. 176 gewonnen. Danach ist im abstrakten Fall des § 1 für eine beschränkte, nicht negative Funktion $f \in \mathfrak{R}$ die Bedingung (34) notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichung $I(f) = \overset{(u)}{\int} f \, d\mu$.

2. Aus dem Beweis des Satzes 16 und des Korollars zu Satz 11 kann folgende Deutung der Bedingung (34) entnommen werden. Sie ist gleichbedeutend damit, daß der rein-unstetige Teil des Funktionals $I' | \mathfrak{R}'$ für die stetige Fortsetzung f' von f auf $E'_{\mathfrak{R}}$ gleich Null ist.

3. Die Bedingung (35) tritt in ähnlichem Zusammenhang auch bei Hewitt [13], S. 275 auf. Dort wird wie bei uns von einem positiven, linearen Funktional I über einem (dort mit $\mathfrak{F}$ bezeichneten) System $\mathfrak{R}$ von auf einer Menge E definierten, reellen Funktionen ausgegangen; von $\mathfrak{R}$ werden die Eigenschaften (1) bis (3) gefordert. Es wird das Ziel verfolgt, eine Darstellung von $I(f)$ durch ein Unterteilungsintegral zu finden, dem eine nach dem Vorbild der Theorie Radonscher Maße konstruierte, additive Mengenfunktion γ^* zugrunde liegt. In Theorem 2.27 wird die Gültigkeit der Gleichung $I(f) = \int f d\gamma^*$ für jede *beschränkte* Funktion $f \in \mathfrak{R}$ behauptet, welche der Bedingung (35) mit $G = [f > 0]$ genügt. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Hewitt ist sein Darstellungssatz (jedenfalls in dieser Allgemeinheit) falsch. Unser Satz 16 zeigt, daß das Hewittsche Ergebnis jedenfalls dann richtig ist, wenn man $\int f d\gamma^*$ entweder durch $\overset{(u)}{\int} f d\mu$ oder durch $\int f' d\varrho'$ ersetzt. (Für die zweite Ersetzung müssen allerdings an $\mathfrak{R}$ die in 4.2 formulierten drei Zusatzforderungen gestellt werden, die aber letzten Endes keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeuten.) Herr Hewitt hat übrigens selbst angeregt, eine Richtigstellung seines Satzes entweder durch Verwendung eines anderen Integralbegriffes oder durch geeignete Einführung idealer Punkte zu versuchen.

4.6. Abschließend wenden wir uns der Frage zu, in welcher Weise sich der stetige Teil I_c des Funktionals I durch das auf $E'_{\mathfrak{R}}$ definierte Radonsche Maß ϱ' ausdrückt.

Satz 17. *Es sei f eine nicht negative Funktion aus $\mathfrak{R}$ und $\tilde{f}$ diejenige Fortsetzung von f auf $E'_{\mathfrak{R}}$, welche in allen Punkten von $E'_{\mathfrak{R}} - E$ gleich Null ist. Dann gilt für den stetigen Teil I_c von I*

$$I_c(f) = \overline{\int} \tilde{f} \, d\varrho' \text{ [29]}. \tag{36}$$

Beweis. Zunächst sei an die Definition von $\overline{\int} \tilde{f} \, d\varrho' = N(\tilde{f})$ erinnert. Es ist

$$\overline{\int} \tilde{f} \, d\varrho' = \inf\left(\sup \int k'_n \, d\varrho' ; \{k'_n\} \in \mathfrak{k}'(\tilde{f})\right),$$

wenn $\mathfrak{k}'(\tilde{f})$ die Menge aller nicht fallenden Folgen $\{k'_n\}$ nicht negativer Funktionen $k'_n \in \mathfrak{R}(E'_{\mathfrak{R}})$ mit $\tilde{f} \leq \sup k'_n$ bezeichnet. Ist andererseits $\mathfrak{r}(f)$ bzw. $\mathfrak{r}'(\tilde{f})$

[29]) Bezüglich $\overline{\int} \tilde{f} \, d\varrho'$ vgl. Fußnote [17]).

die Menge aller nicht fallenden Folgen $\{f_n\}$ bzw. $\{f'_n\}$ nicht negativer Funktionen $f_n \in \mathfrak{R}$ bzw. $f'_n \in \mathfrak{R}'$ mit $f \leqq \sup f_n$ bzw. $\tilde{f} \leqq \sup f'_n$, so kann (nach einer einfachen Überlegung) die in Lemma 3 gewonnene Formel für $I_c(f)$ auch so geschrieben werden

$$I_c(f) = \inf\left(\sup I(f_n); \{f_n\} \in \mathfrak{r}(f)\right).$$

Nun ist offenbar für eine Folge $\{f_n\} \in \mathfrak{r}(f)$ die Folge $\{f'_n\}$ der stetigen Fortsetzungen f'_n der Funktionen f_n auf $E'_{\mathfrak{R}}$ ein Element von $\mathfrak{r}'(\tilde{f})$ und umgekehrt für eine Folge $\{f'_n\} \in \mathfrak{r}'(\tilde{f})$ die Folge $\{f_n\}$ der Verengerungen f_n von f'_n auf E ein Element von $\mathfrak{r}(f)$. Wegen (32) kann daher die letzte Formel zu

$$I_c(f) = \inf\left(\sup I'(f'_n); \{f'_n\} \in \mathfrak{r}'(\tilde{f})\right)$$

umgeschrieben werden. Wir beweisen die Gleichheit der rechten Seite dieser Gleichung mit $\overline{\int} \tilde{f}\, d\varrho'$. Für jede Folge $\{f'_n\} \in \mathfrak{r}'(\tilde{f})$ gilt nach bekannten Eigenschaften des Oberintegrals $\overline{\int} \tilde{f}\, d\varrho' \leqq \sup \overline{\int} f'_n\, d\varrho'$; da nach (25) $\overline{\int} f'_n\, d\varrho' = \int f'_n\, d\varrho' \leqq I'(f'_n)$ ist und $\{f'_n\}$ in $\mathfrak{r}'(\tilde{f})$ beliebig gewählt war, folgt $\overline{\int} \tilde{f}\, d\varrho' \leqq I_c(f)$. Ist umgekehrt $\{k'_n\}$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{k}'(\tilde{f})$, so ist die Verengerung k_n einer jeden Funktion k'_n auf E nach Satz 15 ein Element von Ξ und $\int k_n\, d\mu = \int k'_n\, d\varrho'$. Aus $0 \leqq k_1 \leqq \cdots \leqq k_n \leqq k_{n+1} \leqq \cdots$ und $f \leqq \sup k_n$ folgt $I_c(f) \leqq \sup \overline{I}_c(k_n) \leqq \sup \overline{I}(k_n)$ nach Satz 4, Beh. 1; wegen $\overline{I}(k_n) = \int k_n\, d\mu = \int k'_n\, d\varrho'$ ist also $I_c(f) \leqq \sup \int k'_n\, d\varrho'$ und somit $I_c(f) \leqq \overline{\int} \tilde{f}\, d\varrho'$. Damit ist (36) bewiesen.

Nach 3.4 ist der sich aus $I'|\mathfrak{R}'$ ableitende, an $E'_{\mathfrak{R}}$ adaptierte Inhalt $\mu'|\mathfrak{Q}'$ σ-additiv. Aus μ' leitet sich daher das äußere Maß $\overline{\mu'}$ und das innere Maß $\underline{\mu'}$ ab; $\overline{\mu'}$ und $\underline{\mu'}$ sind definiert auf dem System aller Teilmengen von $E'_{\mathfrak{R}}$, welche durch eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{Q}'$ überdeckt werden können[30]). Mit Hilfe von $\overline{\mu'}$ und $\underline{\mu'}$ errechnet sich der σ-additive Teil μ_c und der reinendlich-additive Teil μ_p von $\mu|\mathfrak{Q}$ wie folgt.

Satz 18. *Für jede Menge $Q \in \mathfrak{Q}$ ist*

$$\mu_c(Q) = \overline{\mu'}(Q) \quad \text{und} \quad \mu_p(Q) = \underline{\mu'}(\overline{Q} - Q), \tag{37}$$

wenn $\overline{Q}$ die abgeschlossene Hülle von Q in $E'_{\mathfrak{R}}$ bezeichnet.

Beweis. Zu $Q \in \mathfrak{Q}$ und $\varepsilon > 0$ existieren nach (15) Funktionen $g, h \in \mathfrak{R}$ mit $0 \leqq g \leqq \chi_Q \leqq h$, $I_c(g) \leqq \mu_c(Q) \leqq I_c(h)$ und $I_c(h-g) \leqq \varepsilon$. Bezeichnen $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ die in allen Punkten von $E'_{\mathfrak{R}} - E$ verschwindenden Fortsetzungen von g und h auf $E'_{\mathfrak{R}}$, so gilt $\tilde{g} \leqq \chi'_Q \leqq \tilde{h}$ und $\overline{\int} \tilde{g}\, d\varrho' \leqq \overline{\int} \chi'_Q\, d\varrho' \leqq \overline{\int} \tilde{h}\, d\varrho'$. Nach Satz 17 ist $\overline{\int} \tilde{g}\, d\varrho' = I_c(g)$ und $\overline{\int} \tilde{h}\, d\varrho' = I_c(h)$; hieraus folgt $\left|\overline{\int} \chi'_Q\, d\varrho' - \mu_c(Q)\right| \leqq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist also $\mu_c(Q) = \overline{\int} \chi'_Q\, d\varrho'$. Der erste Teil der Behauptung folgt daher aus der Gleichung $\overline{\mu'}(Q) = \overline{\int} \chi'_Q\, d\varrho'$, deren Richtigkeit aus der Stoneschen Integrationstheorie entnommen werden kann. Der Vollständigkeit halber geben wir hierfür jedoch einen Beweis an. Es bezeichne $\mathfrak{m}'(Q)$ das System aller nicht fallenden Folgen $\{Q'_n\}$ von Mengen aus $\mathfrak{Q}'$ mit

[30]) Vgl. etwa HAUPT-AUMANN-PAUC [*12b*], S. 55.

$Q \subseteq \bigcup_n Q'_n$; nach Satz 15 ist $\mathfrak{m}'(Q)$ nicht leer. Nach Definition des äußeren Maßes ist

$$\overline{\mu'}(Q) = \inf\left(\sup \mu'(Q'_n); \{Q'_n\} \in \mathfrak{m}'(Q)\right).$$

Für jede Folge $\{Q'_n\} \subseteq \mathfrak{m}'(Q)$ gilt daher $\overline{\int} \chi'_Q \, d\varrho' \leq \sup \overline{\int} \chi'_{Q'_n} \, d\varrho' = \sup \int \chi'_{Q'_n} \, d\varrho' = \sup \mu'(Q'_n)$; also ist $\overline{\int} \chi'_Q \, d\varrho' \leq \overline{\mu'}(Q)$. Weiter existiert zu jeder reellen Zahl ε mit $0 < \varepsilon < 1$ eine nicht fallende Folge $\{f'_n\}$ nicht negativer Funktionen $f'_n \in \mathfrak{R}(E'_{\mathfrak{R}})$ mit $\chi'_Q \leq \sup f'_n$ und $\sup \int f'_n \, d\varrho' \leq \overline{\int} \chi'_Q \, d\varrho' + \varepsilon$. Nach Satz 8 ist jedes f'_n Riemann-integrierbar bezüglich I', also insbesondere I'-meßbar; folglich existiert eine Folge $\{\alpha_n\}$ reeller Zahlen mit $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n > \cdots > 1 - \varepsilon = \eta$ [1] derart, daß $Q'_n = [f'_n > \alpha_n]$ ein Element von $\mathfrak{Q}'$ ist. Nach Konstruktion gilt $\{Q'_n\} \subseteq \mathfrak{m}'(Q)$ und $\mu'(Q'_n) \leq \alpha_n^{-1} \int f'_n \, d\varrho' \leq \eta \int f'_n \, d\varrho'$; also ist $\overline{\mu'}(Q) \leq \sup \mu'(Q'_n) \leq \eta \sup \int f'_n \, d\varrho' \leq \frac{1}{1-\varepsilon} (\overline{\int} \chi'_Q \, d\varrho' + \varepsilon)$. Hieraus folgt die noch fehlende Ungleichung $\overline{\mu'}(Q) \leq \overline{\int} \chi'_Q \, d\varrho'$ und somit die Gleichung $\overline{\mu'}(Q) = \overline{\int} \chi'_Q \, d\varrho'$. — Nach dem Beweis des Satzes 15 ist die Menge $Q' = Q \cup (\overline{Q} - E)$ für jedes $Q \in \mathfrak{Q}$ ein Element von $\mathfrak{Q}'$; also ist auch $\overline{Q} = Q' \in \mathfrak{Q}'$ und $\mu(Q) = \mu'(Q') = \mu'(\overline{Q})$ nach Satz 15 und der Adaption von μ' an $E'_{\mathfrak{R}}$. Wegen $\overline{Q} \in \mathfrak{Q}'$ gilt $\mu'(\overline{Q}) = \overline{\mu'}(Q) + \underline{\mu'}(\overline{Q} - Q)$. Hieraus und aus $\mu(Q) = \mu_c(Q) + \mu_p(Q) = \overline{\mu'}(Q) + \mu_p(Q)$ folgt schließlich $\mu_p(Q) = \underline{\mu'}(\overline{Q} - Q)$.

Die Formel (37) verallgemeinert die erste Hälfte von (25). Genügen nämlich E und $\mathfrak{R}$ den in 3.1 formulierten Bedingungen, so ist $E'_{\mathfrak{R}} = E$, $\tilde{f} = f$ und $\mu' = \mu$, ferner ist dann f ϱ-integrierbar.

Korollar. *Die auf E konstanten Funktionen seien Elemente von $\mathfrak{R}$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:* (1a) $\mu | \mathfrak{Q}$ *ist σ-additiv;* (2a) *es ist* $\underline{\mu'}(E'_{\mathfrak{R}} - E) = 0$; (3a) *es ist* $\mu(E) = \overline{\mu'}(E)$. *Ferner sind gleichwertig die Aussagen:* (1b) $\mu | \mathfrak{Q}$ *ist rein-endlich-additiv;* (2b) *es ist* $\overline{\mu'}(E) = 0$; (3b) *es ist* $\mu(E) = \underline{\mu'}(E'_{\mathfrak{R}} - E)$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 18. Man hat nur zu beachten, daß $E \in \mathfrak{Q}$ und $\overline{E} = E'_{\mathfrak{R}}$ ist.

Bemerkung. Überträgt man von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{R}'$ auch die Zerlegungsteile I_c und I_p von I durch die zu (32) analogen Festsetzungen $(I_c)'(g') = I_c(g)$ und $(I_p)'(g') = I_p(g)$ $(g \in \mathfrak{R})$, so spiegelt sich die Zerlegung $I = I_c + I_p$ in der Zerlegung $I' = (I_c)' + (I_p)'$ wider. Im allgemeinen gilt nicht $(I_c)' = (I')_c$ und $(I_p)' = (I')_p$, sondern nur $(I_c)'(g') \leq (I')_c(g')$ und $(I_p)'(g') \geq (I')_p(g')$ für alle $g' \geq 0$ aus $\mathfrak{R}'$. Hierzu genügt es zu bemerken, daß mit $I_c | \mathfrak{R}$ auch $(I_c)' | \mathfrak{R}'$ stetig ist. *Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Gleichungen* $(I_c)' = (I')_c$ *und* $(I_p)' = (I')_p$ *ist vielmehr die σ-Additivität des Inhalts* $\mu | \mathfrak{Q}$.

Beweis. Für alle $f \in \mathfrak{R}$ ist $(I_c)'(f') = I_c(f) = \overset{(u)}{\int} f \, d\mu_c$ nach Satz 5 sowie $(I')_c(f') = \overset{(u)}{\int} f' \, d\mu' = \overset{(u)}{\int} f \, d\mu$ nach Satz 10 und dem Korollar zu Satz 15. Folglich gilt $(I_c)' = (I')_c$ und damit auch $(I_p)' = (I')_p$ dann und nur dann, wenn $\overset{(u)}{\int} f \, d\mu_c = \overset{(u)}{\int} f \, d\mu$ ist für alle $f \in \mathfrak{R}$. Nach Satz 6 ist hiermit $\mu_c = \mu$

gleichwertig. — Falls μ σ-additiv ist, ergibt sich aus Satz 10 als Darstellung für den stetigen Teil von I die für alle $f \in \mathfrak{R}$ gültige Gleichung $I_c(f) = \int f' \, d\varrho'$.

4.7. Beispiel. *Die Stonesche Kompaktifizierung einer Booleschen Mengenalgebra als Beispiel für einen Raum $E'_{\mathfrak{R}}$.* Es sei $\mathfrak{B}$ eine Boolesche Algebra von Teilmengen einer Grundmenge E, die in $\mathfrak{B}$ als Element enthalten ist; die Menge E sei durch $\mathfrak{B}$ separiert, d.h. zu je zwei verschiedenen Elementen x, $y \in E$ existiert ein $A \in \mathfrak{B}$ mit $x \in A$ und $y \in E - A$. Mit $\mathfrak{R}$ werde bezeichnet die Menge aller $\mathfrak{B}$-Treppenfunktionen, also aller Funktionen $g = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \chi_{A_\nu}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen und $A_1, \ldots, A_n$ Mengen aus $\mathfrak{B}$ sind. Dann besitzt $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften (1) bis (3) sowie (21) und (22), ferner ist jede Funktion $g \in \mathfrak{R}$ beschränkt. Also sind die in 4.2 gemachten Voraussetzungen über $\mathfrak{R}$ erfüllt und es existiert der Raum $E'_{\mathfrak{R}}$. Dieser ist kompakt, da die konstante Funktion $g = 1$ in $\mathfrak{R}$ liegt.

Nach STONE [20] existiert zu jeder Booleschen Algebra $\mathfrak{W}$ ein kompakter, total unzusammenhängender Raum $U_{\mathfrak{W}}$ und ein Isomorphismus Φ von $\mathfrak{W}$ auf die Boolesche Mengenalgebra aller zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $U_{\mathfrak{W}}$. Die Punkte von $U_{\mathfrak{W}}$ sind die Ultrafilter in $\mathfrak{W}$; für ein beliebiges Element $A \in \mathfrak{W}$ besteht ΦA aus allen Ultrafiltern in $\mathfrak{W}$, die A als Element enthalten. Die Mengen ΦA mit $A \in \mathfrak{W}$ bilden eine offene (und abgeschlossene) Basis von $U_{\mathfrak{W}}$. Wendet man das Stonesche Verfahren auf die Boolesche Mengenalgebra $\mathfrak{B}$ an, so kann E als dichte Teilmenge von $U_{\mathfrak{B}}$ aufgefaßt werden, indem man jeden Punkt $x \in E$ mit dem durch x in $\mathfrak{B}$ bestimmten Haupt(ultra)filter identifiziert. Für jedes $A \in \mathfrak{B}$ ist dann ΦA die abgeschlossene Hülle von A in $U_{\mathfrak{B}}$ und $A = E \cap \Phi A$[31]). Wir behaupten:

Es existiert eine die Punkte von E festlassende Homöomorphie von $E'_{\mathfrak{R}}$ auf $U_{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ ist $g = \chi_A$ als Element von $\mathfrak{R}$ zu einer auf $E'_{\mathfrak{R}}$ stetigen Funktion g' fortsetzbar. Aus der Stetigkeit von g' folgt $g'(x') = 1$ für alle $x' \in \bar{A}$ und $g'(y') = 0$ für alle $y' \in \overline{E - A}$; wegen $E'_{\mathfrak{R}} = \bar{E} = \bar{A} \cup \overline{E - A}$ ist daher $g' = \chi'_{\bar{A}}$. Hieraus folgt weiter, daß die Zuordnung $A \to \bar{A}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf die Boolesche Algebra $\overline{\mathfrak{B}}$ der abgeschlossenen Hüllen $\bar{A}$ von Mengen $A \in \mathfrak{B}$ ist und $A = E \cap \bar{A}$ für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ gilt. Die zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen $\bar{A} \in \overline{\mathfrak{B}}$ bilden eine offene (und abgeschlossene) Basis von $E'_{\mathfrak{R}}$. Zu einem beliebigen Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}}$ und einer beliebigen Umgebung U' von x' in E' existiert nämlich eine stetige Funktion $f' | E'_{\mathfrak{R}}$ mit $f'(x') = 1$ und $f'(y') = 0$ für alle $y' \in U'$. Nach Lemma 4 und (31) existiert zu f' eine Funktion $g' \in \mathfrak{R}'$ mit $|f'(z') - g'(z')| \leqq 1/3$ für alle $z' \in E'_{\mathfrak{R}}$. g' hat die Gestalt $g' = \sum \alpha_\nu \chi'_{\bar{A}_\nu} (\alpha_\nu \in \mathsf{P}, \; \bar{A}_\nu \in \overline{\mathfrak{B}})$. Wegen $f'(x') = 1$ ist $g'(x') \neq 0$; folglich liegt x' in einer Menge $\bar{A}_{\nu_0}$ und es ist $|1 - \alpha_{\nu_0}| \leqq 1/3$. Da dann nicht $|\alpha_{\nu_0}| \leqq 1/3$ sein kann, gilt $\bar{A}_{\nu_0} \subseteq U'$. Also ist $\overline{\mathfrak{B}}$ eine offene Basis von $E'_{\mathfrak{R}}$. Ordnet man jedem Punkt $x' \in E'_{\mathfrak{R}}$ als Bild $\psi(x')$ in $U_{\mathfrak{B}}$ den aus allen Mengen $A \in \mathfrak{B}$ mit $x' \in \bar{A}$ bestehenden Ultrafilter in $\mathfrak{B}$ zu, so ist

[31]) Vgl. PAUC [18], S. 33.

$\psi(\bar{A}) = \Phi A$ für jede Menge $A \in \mathfrak{V}$. Hieraus und den bewiesenen Eigenschaften von $E'_{\mathfrak{R}}$ folgt, daß ψ die behauptete Homöomorphie von $E'_{\mathfrak{R}}$ auf $U_{\mathfrak{V}}$ ist, welche E punktweise festläßt.

Wir führen dieses Beispiel weiter und geben eine *Kennzeichnung des σ-additiven und rein-endlich-additiven Teils einer additiven Mengenfunktion* an. Auf der Booleschen Mengenalgebra $\mathfrak{V}$ sei nämlich eine nicht negative, (endlich-)additive Funktion φ definiert. Wir übertragen sie von $\mathfrak{V}$ auf die zu $\mathfrak{V}$ isomorphe Boolesche Algebra $\overline{\mathfrak{V}}$ der abgeschlossenen Hüllen $\bar{A}$ von Mengen $A \in \mathfrak{V}$ in $E'_{\mathfrak{R}}$, indem wir $\varphi'(\bar{A}) = \varphi(A)$ für jedes $A \in \mathfrak{V}$ bzw. $\bar{A} \in \overline{\mathfrak{V}}$ setzen. Dann ist $\varphi' | \overline{\mathfrak{V}}$ trivialerweise σ-additiv; aus φ' leitet sich daher das auf dem System aller Teilmengen von $E'_{\mathfrak{R}}$ definierte äußere Maß $\overline{\varphi'}$ und inneres Maß $\underline{\varphi'}$ ab. Wir behaupten:

Bezeichnet φ_c den σ-additiven und φ_p den rein-endlich-additiven Teil von $\varphi | \mathfrak{V}$, so gilt

$$\varphi_c(A) = \overline{\varphi'}(A) \quad \text{und} \quad \varphi_p(A) = \underline{\varphi'}(\bar{A} - A)$$

für jede Menge $A \in \mathfrak{V}$[32]).

Beweis. Der additiven Funktion $\varphi | \mathfrak{V}$ entspricht in umkehrbar eindeutiger Weise ein positives, lineares Funktional $I | \mathfrak{R}$: Für eine Funktion $g = \sum \alpha_\nu \chi_{A_\nu}$ aus $\mathfrak{R}$ ist $I(g) = \sum \alpha_\nu \varphi(A_\nu)$. Aus $I | \mathfrak{R}$ leitet sich das Funktional $I' | \mathfrak{R}'$ und aus diesem der an $E'_{\mathfrak{R}}$ adaptierte Inhalt $\mu' | \mathfrak{L}'$ ab. Aus der Definition von μ', $\mathfrak{L}'$ folgt, da jede Funktion $g' \in \mathfrak{R}'$ Linearkombination von charakteristischen Funktionen $\chi'_{\bar{A}}$ $(\bar{A} \in \overline{\mathfrak{V}})$ ist, daß $\mu' | \mathfrak{L}'$ die kleinste Erweiterung von $\varphi' | \overline{\mathfrak{V}}$ zu einem vollständigen Inhalt ist. Dann ist aber $\overline{\varphi'} = \overline{\mu'}$ sowie $\underline{\varphi'} = \underline{\mu'}$. Die Behauptung folgt daher aus Satz 18.

Aus den bewiesenen Formeln für φ_c und φ_p folgen nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß φ σ-additiv bzw. rein-endlich-additiv ist; diese Bedingungen sind zu denen im Korollar zu Satz 18 formulierten analog. Insbesondere erweist sich φ dann und nur dann als σ-additiv, wenn $\underline{\varphi'}(\bar{E} - E) = 0$ ist. Dieses Kriterium findet sich bereits bei Pauc [18], S. 35.

Literatur

[1] Arens, R.: Representation of functionals by integrals. Duke math. J. **17**, 499—506 (1950). — [2] Aumann, G.: Reelle Funktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. — [3] Bauer, H.: Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes. Sitzgsber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1953**, 89—117 (1954). — [4] Bauer, H.: Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble. C. r. Acad. Sci. Paris **238**, 1771—1773 (1954). — [5] Bauer, H.: Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ genügen. J. reine angew. Math. **194**, 141—179 (1955). — [6] Bauer, H.: Darstellung additiver Funktionen auf Booleschen Algebren als Mengenfunktionen. Arch. der Math. **6**, 215—222 (1955). — [7] Bauer, H.: Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen. Sitzgsber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1955**, 187—208 (1956). — [8] Bourbaki, N.:

[32]) Da $E'_{\mathfrak{R}} = U_{\mathfrak{V}}$ ist, erweist sich jetzt dieses in [4] unter anderem von uns angekündigte Resultat als Spezialfall von Satz 18.

Intégration, Chap. I—IV. Actual. Scient. et Ind. **1175**, Paris 1952. — [*9*] Gelfand, I., u. G. Šilov: Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes. Rec. math. Moscou, n. ser. **9**, 25—38 (1941). — [*10*] Haupt, O., et Chr. Pauc: Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques. C. r. Acad. Sci. Paris **230**, 711—712 (1950). — [*11*] Haupt, O., u. Chr. Pauc: Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-nat. Kl. **1955**, 189—218 (1956). — [*12a*] Haupt-Aumann-Pauc: Differential- und Integralrechnung, Bd. I, 2. Aufl. Göschens Lehrbücherei **24**, Berlin 1948. — [*12b*] Haupt-Aumann-Pauc: Differential- und Integralrechnung, Bd. III, 2. Aufl. Göschens Lehrbücherei **26**, Berlin 1955. — [*13*] Hewitt, E.: Integral representation of certain linear functionals. Arkiv för Matematik **2**, 269—282 (1951). — [*14*] Loomis, L. H.: Linear functionals and content. Amer. J. Math. **76**, 168—182 (1954). — [*15*] Nakano, H.: On the product of relative spectra. Ann. of Math., II. s. **49**, 281—315 (1948). — [*16*] Nöbeling, G., u. H. Bauer: Über die Erweiterungen topologischer Räume. Math. Ann. **130**, 20—45 (1955). — [*17*] Nöbeling, G., u. H. Bauer: Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **58**, 54—72 (1955). — [*18*] Pauc, Chr.: Darstellungs- und Struktursätze für Boolesche Verbände und σ-Verbände. Arch. der Math. **1**, 29—41 (1948). — [*19*] Pauc, Chr.: Intégrale de partition et intégrale topologique. Familles dérivantes topologiques. C. r. Acad. Sci. Paris **230**, 810—811 (1950). — [*20*] Stone, M. H.: Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. math. Soc. **41**, 375—481 (1937). — [*21*] Stone, M. H.: Notes on integration, I—IV. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **34**, 336—342, 447—455, 483—490 (1948); **35**, 50—58 (1949). — [*22*] Woodbury, M. A.: A decomposition theorem for finitely additive set functions (Preliminary report). Bull. Amer. math. Soc. **56**, 171 (1950). — [*23*] Yosida, K., and E. Hewitt: Finitely additive measures. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 46—66 (1952).

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 2. März 1956)

Sonner, H.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 483—493 (1956)

Über die Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche

Von
Hans Sonner

Einleitung. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in *vollständigen normierten Räumen*, wie sie etwa bei Bourbaki [4] durchgeführt wird, ist unter passenden Umständen geeignet, die Lösung partieller Differentialgleichungen auf die von gewöhnlichen zurückzuführen. Der Gedanke besteht darin, erstens jeder partiellen Differentialgleichung von $p+1$ unabhängigen reellen Veränderlichen eine gewöhnliche Differentialgleichung zuzuordnen, deren Lösungen Funktionen mit *Werten im Raume der Funktionen* von p reellen Variablen sind, und zweitens den Raum dieser Funktionen durch Einführung einer Norm zu einem vollständigen normierten Raum zu machen.

Nun lehren einfachste Beispiele (vgl. § 1, Bemerkung), daß mit jeder Funktion dieses Raumes auch deren sämtliche partiellen Ableitungen zum Raume gehören. Bei der Bildung der Norm muß dies berücksichtigt werden, was dazu führt, von vornherein unendlich oft differenzierbare, ableitungsbeschränkte Funktionen zu betrachten, d.h. Funktionen, deren sämtliche Ableitungen eine gemeinsame Schranke besitzen.

Wegen der Normiertheit unseres Funktionenraumes können wir Abbildungen von Intervallen der reellen Zahlengeraden in diesen Raum betrachten und von Ableitungen sprechen. In diesem Sinn wird in § 1 jeder Differentialgleichung, die wir uns in Normalform gegeben denken, eine gewöhnliche Differentialgleichung zugeordnet; ferner wird der Begriff der Lösung einer partiellen Differentialgleichung präzisiert. Das Studium des Raumes der unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen ist dem § 2 vorbehalten. In § 3 wird gezeigt, daß sich die „starken" Lösungen der partiellen Gleichung aus den Lösungen der zugehörigen gewöhnlichen Gleichung gewinnen lassen. Um zu Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu gelangen, wird in § 4 die Lipschitz-Bedingung in verschärfter Form eingeführt. Mit ihrer Hilfe wird in § 5 ein Existenzsatz formuliert, der dem entsprechenden Satz bei gewöhnlichen Gleichungen wörtlich nachgebildet ist. Nach demselben Muster würden sich (was hier nicht durchgeführt ist) auch Sätze über die Stetigkeit bezüglich eines Parameters und über die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen übertragen lassen. An zwei Beispielen wird das Verfahren erläutert. Der Schluß bringt eine Abgrenzung des in der vorliegenden Arbeit dargelegten Verfahrens gegenüber dem von Cauchy und Kowalewski herrührenden Verfahren.

Zeichenerklärung. Im folgenden bezeichne N (bzw. N^*) die Menge der natürlichen Zahlen (bzw. $\neq 0$), R die Menge der reellen Zahlen, C die Menge

der komplexen Zahlen, $A \times B$ bzw. $\prod_{0 \le i \le p} I_i$ kartesische Produkte, $I - A$ das Komplement von A bezüglich I, D_i die partielle Ableitung nach der i-ten Variablen, etwa $\langle a, b \rangle$ das links abgeschlossene, rechts offene Intervall mit den Endpunkten a und b. Fette Buchstaben bedeuten Vektoren. Ein Mengentripel (G, A, B) mit $G \subset A \times B$ nennen wir (nach BOURBAKI) Korrespondenz, eine Korrespondenz (G, A, B), bei der es zu jedem $x \in A$ ein und nur ein $y \in B$ mit $(x, y) \in G$ gibt, Funktion. Setzen wir $f = (G, A, B,)$ so wird dieses y mit $f(x)$ bezeichnet. Ist der Graph G einer Funktion (G, A, B) Graph einer Relation der Gestalt „$x \in A$ und $y \in B$ und $y = T$", wo T ein Term ist, in dem x vorkommt, so schreiben wir statt (G, A, B) eindrucksvoller $x \to T$ $(x \in A,\ T \in B)$ oder im Zusammenhang auch kurz $x \to T$. Ist u eine von $p+1$ Variablen abhängige Funktion, so bezeichne u_{t_0} die der Identität $u_{t_0}(t_1, \ldots, t_p) = u(t_0, t_1, \ldots, t_p)$ genügende partielle Funktion. $f \circ g$ sei die der Identität $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ genügende Komposition der Funktionen f und g.

§ 1. Der Begriff der Lösung

Gegeben seien eine Familie $(I_i)_{0 \le i \le p}$ von $p+1$ nicht auf einen Punkt reduzierten, in R enthaltenen Intervallen, ein vollständiger normierter Raum E über R und eine Familie $(H_i)_{0 \le i \le p}$ von $p+1$ offenen, nicht leeren Teilen von E. Sei ferner f eine Abbildung von $\prod_{0 \le i \le p} I_i \times \prod_{0 \le i \le p} H_i$ in E. Wir sagen, daß eine in $\prod_{0 \le i \le p} I_i$ erklärte Funktion u mit Werten in E *Lösung* der Differentialgleichung

$$D_0 \mathsf{x} = \mathsf{f}(t_0, t_1, \ldots, t_p, \mathsf{x}, D_1 \mathsf{x}, \ldots, D_p \mathsf{x}) \tag{1}$$

ist, wenn erstens u stetig ist und stetige partielle Ableitungen $D_1 \mathsf{u}, \ldots, D_p \mathsf{u}$ besitzt, und zweitens ein abzählbarer Teil A von I_0 existiert, so daß u in jedem Punkt t des Produktes $\prod_{0 \le i \le p} I_i'$ mit $I_0' = I_0 - A$ und $I_j' = I_j$ $(1 \le j \le p)$ eine partielle Ableitung $D_0 \mathsf{u}(t)$ mit $D_0 \mathsf{u}(t) = \mathsf{f}\big(t, \mathsf{u}(t), D_1 \mathsf{u}(t), \ldots, D_p \mathsf{u}(t)\big)$ hat. Falls für A der *leere* Teil von I_0 gewählt werden kann, sprechen wir von einer *strengen* Lösung der Gl. (1) in $\prod_{0 \le i \le p} I_i$. (1) heißt genauer „partielle Differentialgleichung erster Ordnung in Normalform". Man beachte, daß die hier gegebene Definition der Lösung im Falle $p = 0$ mit der üblichen für gewöhnliche Differentialgleichungen übereinstimmt.

Die der Variablen t_0 eingeräumte Sonderstellung erlaubt in vielen Fällen, die Lösung einer partiellen Differentialgleichung von $p+1$ Veränderlichen auf die einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückzuführen. Bezeichne zu diesem Zweck $\tilde{E}$ die Menge aller in $Q = \prod_{1 \le j \le p} I_j$ erklärten unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen $\tilde{\mathsf{x}}$ mit Werten in E, $\|\tilde{\mathsf{x}}\|$ das Supremum der Menge aller Zahlen $\|\tilde{\mathsf{x}}(\tau)\|$ $(\tau \in Q)$, $[\tilde{\mathsf{x}}]$ das (endliche) Supremum der Menge aller Zahlen $\|D_1^{n_1} \ldots D_p^{n_p} \tilde{\mathsf{x}}\|$ $\big((n_1, \ldots, n_p) \in \mathsf{N}^p\big)$ und schließlich $\tilde{H}$ die Menge aller Funktionen $\tilde{\mathsf{x}} \in \tilde{E}$, für die die abgeschlossene Hülle $\overline{Q'}$ des

Bildes Q' durch $\tau \to \left(\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)\right)$ von Q kompakter Teil des Produktraumes $\prod_{0\le i\le p} H_i$ ist. Zu $t_0 \in I_0$ und $\tilde{\mathfrak{x}} \in \tilde{H}$ bilden wir die Funktion

$$\tau \to \mathfrak{f}\left(t_0, \tau, \tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)\right) \quad \left(\tau \in Q, \mathfrak{f}(t_0, \tau, \tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)) \in E\right)$$

und geben ihr den Namen $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$. Das Zeichen $\tilde{\mathfrak{f}}$ behalten wir der Korrespondenz $(\Phi, I_0 \times \tilde{H}, \tilde{E})$ vor, wobei Φ die Menge aller Paare $\left((t_0, \tilde{\mathfrak{x}}), \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})\right)$ mit $(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) \in I_0 \times \tilde{H}$ und $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) \in \tilde{E}$ ist. Falls $\tilde{\mathfrak{x}} \to [\tilde{\mathfrak{x}}]$ die Menge $\tilde{E}$ zu einem vollständigen normierten Raum macht, können wir Abbildungen eines Intervalls der reellen Zahlengeraden in diesen Raum betrachten und Ableitungen erklären. In diesem Sinn betrachten wir statt (1) die (gewöhnliche) Differentialgleichung

$$\tilde{\mathfrak{x}}' = \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}). \tag{2}$$

Für eine Lösung $\mathfrak{u}$ von (1) bezeichne $\tilde{\mathfrak{u}}$ die Korrespondenz $(\Psi, I_0, \tilde{E})$, wobei Ψ die Menge aller Paare $(t_0, \mathfrak{u}_{t_0})$ mit $t_0 \in I_0$ und $\mathfrak{u}_{t_0} \in \tilde{E}$ ist. Diese kann man, wie wir sehen werden, unter geeigneten Umständen als Lösung von (2) deuten. Wir sagen, eine Lösung $\mathfrak{u}$ von (1) in $\prod_{0\le i\le p} I_i$ gehe in die Funktion $\tilde{\mathfrak{x}}_* \in \tilde{H}$ im Punkt $t_* \in I_0$ über, wenn $\mathfrak{u}_{t_*} = \tilde{\mathfrak{x}}_*$ ist.

Beispiele. 1. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$D_0 x = a(t_0, t_1) \cdot x + b(t_0, t_1) \cdot D_1 x$$

besitzt im Falle konstanter Koeffizienten die Lösung $(t_0, t_1) \to e^{at_0} \cdot \tilde{x}_*(t_1 + b_1 t_0)$, die wir u nennen. Diese geht in die Funktion $\tilde{x}_*$ im Punkt 0 über. Die zugeordnete Gleichung $\tilde{x}' = a_{t_0} \cdot \tilde{x} + b_{t_0} \cdot D_1\tilde{x}$ besitzt im Falle konstanter Koeffizienten die zugeordnete Lösung $t_0 \to u_{t_0}$. Diese nimmt den Wert (lies Funktion) $\tilde{x}_*$ im Punkt 0 an.

2. Die hyperbolische Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a(x, y)$ läßt sich mit unserer Bezeichnungsweise als lineares System erster Ordnung in der Normalform

$$D_0\xi_1 = \xi_2, \quad D_0\xi_2 = D_1\xi_3 + a(t_0, t_1), \quad D_0\xi_3 = D_1\xi_2$$

schreiben. Die Funktion $\mathfrak{f}$ lautet $\left(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho})_{1\le\varrho\le 3}, (\xi_{1\varrho})_{1\le\varrho\le 3}\right) \to \left(\xi_{02}, \xi_{13} + a(t_0, t_1), \xi_{12}\right)$. Dem partiellen Differentialgleichungssystem ist das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\tilde{\xi}_1' = \tilde{\xi}_2, \quad \tilde{\xi}_2' = D_1\tilde{\xi}_3 + a_{t_0}, \quad \tilde{\xi}_3' = D_1\tilde{\xi}_2$$

zugeordnet. $\tilde{\mathfrak{f}}$ hat das Aussehen $\left(t_0, (\tilde{\xi}_\varrho)_{1\le\varrho\le 3}\right) \to \left(\tilde{\xi}_2, D_1\tilde{\xi}_3 + a_{t_0}, D_1\tilde{\xi}_2\right)$. Dabei haben wir $\mathfrak{x} = (\xi_\varrho)_{1\le\varrho\le 3}$, $\mathfrak{x}_0 = (\xi_{0\varrho})_{1\le\varrho\le 3}$, $\mathfrak{x}_1 = (\xi_{1\varrho})_{1\le\varrho\le 3}$, $\tilde{\mathfrak{x}} = (\tilde{\xi}_\varrho)_{1\le\varrho\le 3}$ gesetzt.

Bemerkung. Zu den partiellen Differentialgleichungen $D_0\mathfrak{x} = D_j\mathfrak{x}\ (1 \le j \le p)$ gehören die gewöhnlichen Differentialgleichungen $\tilde{\mathfrak{x}}' = D_j\tilde{\mathfrak{x}}\ (1 \le j \le p)$. Also ist $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) = D_j\tilde{\mathfrak{x}}\ (1 \le j \le p)$. Soll mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Element von $\tilde{E}$ sein, so muß notwendig mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ auch die partielle Ableitung $D_j\tilde{\mathfrak{x}}\ (1 \le j \le p)$ zu $\tilde{E}$ gehören; d.h. die Funktionen von $\tilde{E}$ sind unendlich oft differenzierbar.

§ 2. Der Raum der unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen

Satz 1. *Sei E ein vollständiger normierter Raum über* R. *Dann ist der mit der Norm* $[\tilde{\mathsf{x}}]$ *versehene Vektorraum* $\tilde{E}$ *ein vollständiger normierter, nur aus Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen bestehender Raum über* R.

Die Vektor- und Normeigenschaften ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften von E und der Linearität der Ableitungen. Es genügt also, die Vollständigkeit nachzuweisen. Sei zu diesem Zweck $\mathfrak{F}$ ein CAUCHY-Filter (bezüglich der Norm $[\tilde{\mathsf{x}}]$) auf $\tilde{E}$. Offenbar ist dann auch für jedes p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ von N^p das System $\mathfrak{B}^{(n_1, \ldots, n_p)}$, das aus $\mathfrak{F}$ entsteht, indem man in jeder Menge von $\mathfrak{F}$ die Funktionen $\tilde{\mathsf{x}}$ durch die Ableitungen $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}$ ersetzt, Basis eines CAUCHY-Filters $\mathfrak{F}^{(n_1, \ldots, n_p)}$ auf der Menge $\mathscr{B}(Q, E)$ aller beschränkten Abbildungen von Q in E (bezüglich der Norm $\|\tilde{\mathsf{x}}\|$). Wegen der Vollständigkeit von E konvergieren diese Filter $\mathfrak{F}^{(n_1, \ldots, n_p)}$ gleichmäßig gegen gewisse (beschränkte) Funktionen $\tilde{\mathsf{x}}^{(n_1, \ldots, n_p)}$, die notwendig mit den Ableitungen $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}_0$ von $\tilde{\mathsf{x}}_0 = \tilde{\mathsf{x}}^{(0, \ldots, 0)}$ übereinstimmen.

Um die Endlichkeit von $[\tilde{\mathsf{x}}_0]$ und die Konvergenz von $\mathfrak{F}$ gegen $\tilde{\mathsf{x}}_0$ bezüglich der Norm $[\tilde{\mathsf{x}}]$ zu zeigen, wähle man zu $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{F}$ so, daß für alle Paare $\tilde{\mathsf{x}}, \tilde{\mathsf{y}}$ von A und alle p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ von N^p die Ungleichung $\|D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} (\tilde{\mathsf{x}} - \tilde{\mathsf{y}})\| \leq \varepsilon$ gilt. Schafft man nach Anwendung der Dreiecksungleichung das $\tilde{\mathsf{y}}$ enthaltende Glied auf die rechte Seite und beachtet die gleichmäßige Konvergenz der Filter $\mathfrak{F}^{(n_1, \ldots, n_p)}$, so kommt für ein festes $\tilde{\mathsf{y}}$ schließlich $[\tilde{\mathsf{x}}_0] \leq \varepsilon + [\tilde{\mathsf{y}}]$, also die Endlichkeit von $\tilde{\mathsf{x}}_0$. Geht man dagegen in der obigen Ungleichung sofort zum Limes über, so gilt für alle $\tilde{\mathsf{y}} \in A$ die Relation $[\tilde{\mathsf{x}}_0 - \tilde{\mathsf{y}}] \leq \varepsilon$, d.h. die behauptete Konvergenz.

Die Stetigkeit der partiellen Ableitung $\tilde{\mathsf{y}} = D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\|\tilde{\mathsf{y}}(\tau') - \tilde{\mathsf{y}}(\tau)\| = \Big\| \sum_{1 \leq k \leq p} \big(\tilde{\mathsf{y}}(t_1', \ldots, t_{k-1}', t_k', t_{k+1}, \ldots, t_p) - \tilde{\mathsf{y}}(t_1', \ldots, t_{k-1}', t_k, t_{k+1}, \ldots, t_p)\big) \Big\|$$

$$\leq \sum_{1 \leq k \leq p} |t_k' - t_p| \cdot \big(\|D_k \tilde{\mathsf{y}}\| + o_k(t' - t)\big) \leq ([\tilde{\mathsf{x}}] + 1) \sum_{1 \leq k \leq p} |t_k' - t_k|,$$

falls τ' hinreichend nahe bei τ liegt.

Satz 2. (a) *Für jede stetige lineare Abbildung* U *von E in E ist mit* $\tilde{\mathsf{x}}$ *auch* $\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}$ *eine Funktion von* $\tilde{E}$, *und es gilt* $[\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}] \leq \|\mathsf{U}\| \cdot [\tilde{\mathsf{x}}]$.

(b) *Für jedes p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ von* N^p *ist mit* $\tilde{\mathsf{x}}$ *auch* $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}$ *eine Funktion von* $\tilde{E}$, *und es gilt* $[D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}] \leq [\tilde{\mathsf{x}}]$.

(a) Mit $\tilde{\mathsf{x}}$ ist wegen der Stetigkeit der linearen Abbildung auch $\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} (\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}) = \mathsf{U} \circ (D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}})$, also wegen der Beschränktheit einer stetigen linearen Abbildung

$$\|D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} (\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}})\| \leq \|\mathsf{U}\| \cdot \|D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}\| \quad \text{oder} \quad [\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}] \leq \|\mathsf{U}\| \cdot [\tilde{\mathsf{x}}].$$

(b) Ergibt sich sofort aus der Definition von $[\tilde{\mathsf{x}}]$.

Satz 3. *Sei* $(H_i)_{0 \leq i \leq p}$ *eine Familie von offenen Teilen von E. Dann ist* $\tilde{H}$ *ein offener Teil von* $\tilde{E}$.

Wir wählen zu vorgegebenem $\tilde{\mathfrak{x}} \in \tilde{H}$ ein $\varrho > 0$ so, daß die abgeschlossenen Kugeln mit dem Radius ϱ und dem Zentrum $\big(\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)\big)$ $(\tau \in Q)$ noch in $\prod_{0 \le i \le p} H_i$ liegen, was nach Definition von $\tilde{H}$ und der Offenheit von $\prod_{0 \le i \le p} H_i$ möglich ist. Dann gehört, wie man leicht nachrechnet, die aus allen Funktionen $\tilde{\mathfrak{y}} \in \tilde{E}$ mit $[\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}] \le \varrho$ bestehende Umgebung von $\tilde{\mathfrak{x}}$ zu $\tilde{H}$.

Bemerkung. Wie das Beispiel $E = \mathsf{R}$, $I_i = \langle 0, 1\rangle$ $(0 \le i \le p)$, $H_0 = \rangle 0, 1\langle$, $H_1 = \rangle 2, 3\langle$, $H_j = \mathsf{R}$ $(2 \le j \le p)$ lehrt, gibt es Familien $(H_i)_{0 < i \le p}$ von nichtleeren Mengen H_i, die zu leerem $\tilde{H}$ führen.

§ 3. Zusammenhang der Lösungen

Satz 4. *Sei t_* ein Punkt von I_0, $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ eine Funktion von $\tilde{H}$, $\mathfrak{u}$ eine in $\prod_{0 \le i \le p} I_i$ erklärte Funktion mit Werten in E. Ist die zugehörige Korrespondenz $\tilde{\mathfrak{u}}$ Lösung der Gl. (2) in I_0 und nimmt sie den Wert $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ im Punkt t_* an, so ist $\mathfrak{u}$ Lösung der Gl. (1) in $\prod_{0 \le i \le p} I_i$ und geht in die Funktion $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ im Punkt t_* über.*

(a) Die Stetigkeit von $\mathfrak{u}$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\|\mathfrak{u}(t_0', \tau) - \mathfrak{u}(t_0, \tau)\| \le [\mathfrak{u}_{t_0'} - \mathfrak{u}_{t_0}] + \|\mathfrak{u}(t_0, \tau') - \mathfrak{u}(t_0, \tau)\|;$$

das erste Glied der rechten Seite kann wegen der Stetigkeit der Funktion $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ im Punkt t_0, das zweite wegen der Stetigkeit der Funktion $\mathfrak{u}_{t_0}$ im Punkt τ beliebig klein gemacht werden.

(b) Da $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ als Lösung von (2) das Intervall I_0 in den Raum $\tilde{E}$ der unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen abbildet, ist $\mathfrak{u}_{t_0}$ für alle $t_0 \in I_0$ unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt.

(c) Bei festem $\tau \in Q$ ist $t_0 \to \mathfrak{u}(t_0, \tau)$ in jedem Punkt t_0 von I_0 differenzierbar, in dem es auch $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ ist; denn zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung V von t_0, so daß für alle t_0' von V die Relation

$$\left[\frac{\tilde{\mathfrak{u}}(t_0') - \tilde{\mathfrak{u}}(t_0)}{t_0' - t_0} - \tilde{\mathfrak{u}}'(t_0)\right] \le \varepsilon$$

gilt. Daraus folgt für alle t_0' von V die Ungleichung

$$\left\| \frac{\mathfrak{u}(t_0', \tau) - \mathfrak{u}(t_0, \tau)}{t_0' - t_0} - D_0\mathfrak{u}(t_0, \tau) \right\| \le \varepsilon,$$

wobei $D_0\mathfrak{u}(t_0, \tau)$ für den Wert der Funktion $\tilde{\mathfrak{u}}'(t_0)$ im Punkt τ geschrieben ist. Nun gilt in jedem Punkt t_0 des Komplements bezüglich I_0 einer abzählbaren Menge A die Gleichung $\tilde{\mathfrak{u}}'(t_0) = \tilde{\mathfrak{f}}\big(t_0, \tilde{\mathfrak{u}}(t_0)\big)$, also in jedem Punkt t des Produktes $\prod_{0 \le i \le p} I_i'$ mit $I_0' = I_0 - A$ und $I_i' = I_i$ $(1 \le j \le p)$ nach dem eben Bewiesenen $D_0\mathfrak{u}(t) = \mathfrak{f}\big(t, \mathfrak{u}(t), D_1\mathfrak{u}(t), \ldots, D_p\mathfrak{u}(t)\big)$.

(d) Es ist $\mathfrak{u}_{t_*}$ gleich dem Wert der Lösung $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ für den Punkt t_*, also gleich $\mathfrak{x}_*$.

Bemerkung. Daß nicht jede Lösung $\mathfrak{u}$ von (1) zu einer Lösung $\tilde{\mathfrak{u}}$ von (2) führt, lehrt die Differentialgleichung $D_0 x = t_1 x$. Wir setzen, um etwas

Bestimmtes vor Augen zu haben, $I_0 = I_1 = \langle 1, 2\rangle$, $E = H_0 = H_1 = \mathsf{C}$. Zu ihr gehört die gewöhnliche Gleichung $\tilde{x}' = \tilde{f}(t_0, \tilde{x}) = \varphi \cdot \tilde{x}$, wobei φ die kanonische Abbildung von I_1 in C bedeutet. Offensichtlich ist $(t_0, t_1) \to e^{t_0 t_1}$ strenge Lösung der partiellen Gleichung und geht in die Funktion $t_1 \to e^{t_1}$ im Punkt $t_* = 1$ über; wir geben ihr den Namen u. Dagegen ist $\tilde{u}$ nicht Lösung der gewöhnlichen Gleichung; denn es ist $\|D_1^n u_{t_0}\| = t_0^n \cdot e^{2t_0}$, also $[u_{t_0}] = e^2$, falls $t_0 \neq 1$ ist, $= \infty$, falls $t_0 > 1$ ist. Es gehört also das Paar (t_0, u_{t_0}) nur für $t_0 = t_* = 1$ zum Graph von $\tilde{u}$.

Definition 1. *Wir nennen* starke *Lösung von* (1) *jede Lösung* u *von* (1), *für die die zugehörige Korrespondenz* $\tilde{\mathsf{u}}$ *Lösung der Gl.* (2) *ist.*

Satz 5. *Sei* u *eine starke Lösung von* (1). *Dann ist für jedes feste* $t_0 \in I$ *die Funktion* u_{t_0} *unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt. Ferner ist die Familie der Funktionen* $t_0 \to D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}(t_0, \tau)$ $\left(\tau \in Q, (n_1, \dots, n_p) \in \mathsf{N}^p\right)$ *gleichgradig stetig.*

Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Definition 1, die zweite auf Grund der Abschätzung

$$\|D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}(t_0', \tau) - D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}(t_0, \tau)\| \leq \|D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}_{t_0'} - D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}_{t_0}\| \leq \leq [\mathsf{u}_{t_0'} - \mathsf{u}_{t_0}]$$

und der Stetigkeit von $t_0 \to \mathsf{u}_{t_0}$.

§ 4. Die verschärfte LIPSCHITZ-Bedingung

Um zu Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu gelangen, ist es nützlich, der Funktion f gewisse Bedingungen aufzuerlegen. Diese drücken sich am einfachsten in der Korrespondenz $\tilde{\mathsf{f}}$ aus.

Definition 2. *Man sagt, daß eine Abbildung* f *von* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ *in* E verschärft Lipschitzsch (*bzw.* verschärft lokal Lipschitzsch) *ist, falls erstens* $\tilde{H}$ *nicht leer, zweitens* $\tilde{\mathsf{f}}$ *eine Funktion und drittens* $\tilde{\mathsf{f}}$ *Lipschitzsch (bzw. lokal Lipschitzsch) bezüglich der Norm* $[\tilde{\mathsf{x}}]$ *ist. Wenn* f *verschärft Lipschitzsch (bzw. verschärft lokal Lipschitzsch) in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ *ist, heißt die Gleichung* $D_0 \mathsf{x} = \mathsf{f}(t_0, \dots, t_p, \mathsf{x}, D_1 \mathsf{x}, \dots, D_p \mathsf{x})$ *verschärft Lipschitzsch (bzw. verschärft lokal Lipschitzsch) in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$.

Die zweite Bedingung besagt, daß für jeden Punkt t_0 von I_0 und für jede Funktion $\tilde{\mathsf{x}}$ von $\tilde{H}$ die Funktion $\tau \to \mathsf{f}\left(t_0, \tau, \tilde{\mathsf{x}}(\tau), D_1 \tilde{\mathsf{x}}(\tau), \dots, D_p \tilde{\mathsf{x}}(\tau)\right)$ zu $\tilde{E}$ gehört. Sie muß also insbesondere unendlich oft differenzierbar sein, was man in allgemeinen normierten Räumen der Funktion f nicht ohne weiteres ansieht. Wie man in vielen Fällen auf konstruktivem Wege zu derartigen Funktionen gelangt, die überdies noch verschärft Lipschitzsch sind, lehrt der folgende Satz.

Satz 6. (a) *Mit den Funktionen* f *und* g *und für* $\alpha \in \mathsf{R}$ *sind auch die Funktionen* $\mathsf{f} + \mathsf{g}$ *und* $\alpha \cdot \mathsf{f}$ *verschärft Lipschitzsch in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$.

(b) *Ist* U *eine stetige lineare Abbildung von* E *in* E, *dann ist mit* f *auch die Funktion* $\mathsf{U} \circ \mathsf{f}$ *verschärft Lipschitzsch in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$.

(a) Zunächst ist $\tilde{H}$ nicht leer. Ferner beachte man, daß mit $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $\tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $\alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\tilde{E}$ gehören (Satz 1) und mit $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $t_0 \to \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ auch $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $t_0 \to \alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Regelfunktionen sind. Schließlich gelten nach Satz 1 die Ungleichungen

$$\left[\left(\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{g}})\right) - \left(\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})\right)\right] \leq (k_1 + k_2)\,[\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}],$$

$$[\alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] \leq |\alpha| \cdot k \cdot [\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}],$$

wo k_1, k_2, k Lipschitz-Konstanten sind.

(b) Wiederum ist $\tilde{H}$ nicht leer. Ferner bedenke man, daß mit $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ auch die Funktion $\mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\tilde{E}$ gehört (Satz 2) und mit $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ wegen der Stetigkeit von U auch $t_0 \to \mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Regelfunktion ist. Endlich gilt nach Satz 2 die Ungleichung

$$[\mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] \leq \|\mathsf{U}\| \cdot k \cdot [\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}],$$

wo k eine Lipschitz-Konstante ist.

Bemerkung. Der Satz gilt auch, wenn man die Werte „verschärft Lipschitzsch" überall durch „verschärft lokal Lipschitzsch" ersetzt.

Beispiele. 1. Gegeben sei eine Abbildung $\mathfrak{a}$ von $\coprod_{0 \leq i \leq p} I_i$ in E mit $\mathfrak{a}_{t_0} \in \tilde{E}$; ferner sei $t_0 \to \mathfrak{a}_{t_0}$ Regelfunktion. Dann ist die Funktion

$$(t_0, \ldots, t_p, \mathsf{x}_0, \ldots, \mathsf{x}_p) \to \mathfrak{a}(t_0, \ldots, t_p)$$

verschärft Lipschitzsch in $\coprod_{0 \leq i \leq p} I_i \times E^{p+1}$. In der Tat ist zunächst $\tilde{H}$ nicht leer. Wegen $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{a}_{t_0}$ ist mit $\mathfrak{a}_{t_0}$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \mathsf{x})$ zu $\tilde{E}$ gehörig und mit $t_0 \to \mathfrak{a}_{t_0}$ auch $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Regelfunktion. Die Lipschitz-Bedingung ist wegen $[\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] = 0$ in trivialer Weise erfüllt.

2. Für alle $0 \leq i \leq p$ ist die Funktion $(t_0, \ldots, t_p, \mathsf{x}_0, \ldots, \mathsf{x}_p) \to \mathsf{x}_i$ verschärft Lipschitzsch in $\mathsf{R}^{p+1} \times E^{p+1}$. Wiederum ist $\tilde{H}$ nicht leer. Wegen $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) = \tilde{\mathfrak{x}}$ (bzw. $D_j \tilde{\mathfrak{x}}, j \geq 1$) gehört (nach Satz 2) mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\tilde{E}$; ferner ist $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ konstant, also Regelfunktion. Die Lipschitz-Bedingung ist wegen $[\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] \leq [\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}]$ mit der Konstanten 1 erfüllt.

3. Für jede Familie $(a_i)_{0 \leq i \leq p}$ von reellen Zahlen ist nach obigem und Satz 5 die Funktion $(t_0, \ldots, t_p, \mathsf{x}_0, \ldots, \mathsf{x}_p) \to \sum_{0 \leq i \leq p} a_i \mathsf{x}_i$ verschärft Lipschitzsch in $\mathsf{R}^{p+1} \times E^{p+1}$ (vgl. 1., Beispiel 1).

4. Sei $p = 1$, $E = \mathsf{C}^3$, a eine Abbildung von $I_0 \times I_1$ in C mit $a_{t_0} \in \tilde{\mathsf{C}}$; ferner sei $t_0 \to a_{t_0}$ Regelfunktion. Dann ist die Funktion

$$\left(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho})_{1 \leq \varrho \leq 3}, \quad (\xi_{1\varrho})_{1 \leq \varrho \leq 3}\right) \to \left(\xi_{02}, \xi_{13} + a(t_0, t_1), \xi_{12}\right)$$

verschärft Lipschitzsch in $(I_0 \times I_1) \times (\mathsf{C}^3 \times \mathsf{C}^3)$; denn es sind die Abbildungen

$$\left(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho}), (\xi_{1\varrho})\right) \to \left(0, a(t_0, t_1), 0\right)$$

$$\left(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho}), (\xi_{1\varrho})\right) \to (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) \to (\xi_{02}, 0, 0)$$

$$\left(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho}), (\xi_{1\varrho})\right) \to (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}) \to (0, \xi_{13}, \xi_{12})$$

nach obigem und Satz 5 verschärft Lipschitzsch, also auch deren Summe (vgl. § 1, Beispiel 2).

5. Die Funktion $(t_0, t_1, x_0, x_1) \to t_1 \cdot x_0$ ist nicht lokal verschärft Lipschitzsch; denn es ist $D_1^{n_1} \tilde{f}(t_0, \tilde{x}) = \varphi \cdot D_1^{n_1} \tilde{x} + n \cdot D_1^{n-1} \tilde{x}$, wobei φ die kanonische Abbildung von I_1 in C bedeutet. Wählen wir für $\tilde{x}$ speziell die (zu $\tilde{E}$) gehörige Funktion $t_1 \to e^{t_1}$, so geht $\tilde{f}(t_0, \tilde{x})$ in die Funktion

$$t_1 \to t_1 e^{t_1} + n e^{t_1} \geqq (1 + n) \cdot e$$

über. Wegen $\sup_{n \in \mathsf{N}} (1+n) \cdot e = \infty$ ist also $\tilde{f}$ keine Funktion (vgl. § 3, Bemerkung).

§ 5. Existenzsätze

Der folgende Satz ist eine wörtliche Übertragung des entsprechenden, für gewöhnliche Differentialgleichungen geltenden Satzes (vgl. [4]).

Hauptsatz. *Seien $(I_i)_{0 \leq i \leq p}$ eine Familie von nicht auf einen Punkt reduzierten, in R enthaltenen Intervallen, $t_* \in I_0$ der Anfang von I_0, $(H_i)_{0 \leq i \leq p}$ eine Familie von offenen, nicht leeren Teilen von E, f eine in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ verschärft lokal* LIPSCHITZsche *Funktion.*

(a) *Zu jedem $\tilde{\mathsf{x}}_* \in \tilde{H}$ existiert ein größtes Intervall $J \subset I_0$ mit dem Anfang $t_* \in J$ derart, daß in dem Produkt $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ mit $I_0' = J$ und $I_j' = I_j$ $(1 \leq j \leq p)$ eine starke Lösung u der Gleichung $D_0 \mathsf{x} = \mathsf{f}(t_0, \ldots, t_p, \mathsf{x}, D_1 \mathsf{x}, \ldots, D_p \mathsf{x})$ existiert, die (bzw. deren Ableitung $D_j \mathsf{u}$, $1 \leq j \leq p$) ihre Werte in H_0 (bzw. H_j) annimmt und in die Funktion $\tilde{\mathsf{x}}_*$ im Punkt t_* übergeht; diese Lösung ist eindeutig.*

(b) *Wenn $J \neq I_0$, dann ist J ein halb-offenes Intervall $\langle t^*, \beta \langle$ von endlicher Länge; überdies ist für jeden kompakten Teil $K \subset \tilde{H}$ auch das reziproke Bild durch $t_0 \to \mathsf{u}_{t_0}$ von K ein kompakter Teil von R.*

(c) *Wenn J beschränkt ist, und wenn $\tilde{\mathsf{f}}(t_0, \mathsf{u}_{t_0})$ in J beschränkt ist, dann hat $t_0 \to \mathsf{u}_{t_0}$ einen linksseitigen Grenzwert $\tilde{\mathsf{c}}$ im Endpunkt von J; wenn überdies $J \neq I_0$, dann ist $\tilde{\mathsf{c}}$ ein Begrenzungspunkt von $\tilde{H}$ in $\tilde{E}$.*

Auf $\tilde{\mathsf{f}}$ umgeschrieben, lauten die Voraussetzungen: Seien $I_0 \subset \mathsf{R}$ ein (nicht auf einen Punkt reduziertes) Intervall, $t_* \in I_0$ der Anfang von I_0, $\tilde{H}$ ein offener, nicht leerer Teil von $\tilde{E}$ (Satz 3 und Definition 2), $\tilde{\mathsf{f}}$ eine in $I_0 \times \tilde{H}$ lokal LIPSCHITZsche Funktion (Definition 2). Daraus folgt die Existenz eines Intervalls $J \subset I_0$ und einer Lösung $\tilde{\mathsf{u}}$ der Gleichung $\tilde{\mathsf{x}}' = \tilde{\mathsf{f}}(t_0, \tilde{\mathsf{x}})$, die die Eigenschaften (a), (b), (c) — sinngemäß abgewandelt — des vorstehenden Satzes besitzt. Wir bilden eine in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ erklärte Funktion u mit Werten in E, indem wir jedem Punkt (t_0, τ) des Produktes $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ den Wert der Funktion $\tilde{\mathsf{u}}(t_0)$ für den Punkt τ zuordnen. Offensichtlich stimmt $t_0 \to \mathsf{u}_{t_0}$ mit $\tilde{\mathsf{u}}$ überein, woraus sich zusammen mit Satz 4 und Definition 1 die Behauptung ergibt.

Bemerkung. Man wird zunächst die Verwendung der mit einer Tilde versehenen Größen $\tilde{E}$, $\tilde{H}$, $\tilde{\mathsf{c}}$ in der Formulierung des Satzes als problemfremd empfinden. Überlegt man sich jedoch, daß die Lösungsfläche durch gleich-

mäßiges Fortschreiten längs der I_0-Achse auf der ganzen Breite der Q-Achse entsteht, so erscheint diese Auffassung als die naturgegebene. (Siehe Fig. 1!)

Beispiele. 1. Wir betrachten die lineare homogene Gleichung $D_0 x = a x + b \cdot D_1 x$ mit konstanten Koeffizienten. Sie ist verschärft lokal Lipschitzsch (vgl. § 4, Beispiel 3). Die zugehörige gewöhnliche Gleichung lautet $\tilde{x}' = a\,\tilde{x} + b \cdot D_1 \tilde{x}$ oder $\tilde{x}' = A \cdot \tilde{x}$, wobei A die stetige lineare Abbildung $\tilde{x} \to a\tilde{x} + b \cdot D_1 \tilde{x}$ bedeutet (vgl. § 1, Beispiel 1). Wir setzen die Lösung $\tilde{u}$ in der Form $t_0 \to C(t_0, t_*) \cdot \tilde{x}_*$ an; $C(t_0, t_*)$ nennt man die Resolvente der linearen Gleichung. Nach bekannten Sätzen ist $C(t_0, t_*) = \exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big)$, also $\tilde{u}(t_0) = \exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big) \cdot \tilde{x}_* = \sum_{n \in \mathbf{N}} (A^n \cdot \tilde{x}_*) \frac{(t_0 - t_*)^n}{n!}$. Wir berechnen:

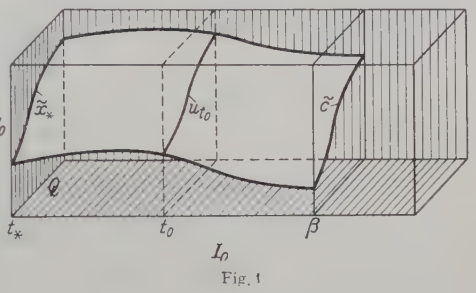


Fig. 1

$$A^n \tilde{x}_* = \sum_{0 \le \nu \le n} \binom{n}{\nu} a^\nu \cdot D_1^{n-\nu} \tilde{x}_* \cdot b^{n-\nu},$$

also

$$\tilde{u}(t_0) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}} \frac{1}{\nu!} a^\nu (t_0 - t_*)^\nu \cdot \sum_{\mu \in \mathbf{N}} \frac{1}{\mu!} b^\mu (t_0 - t_*)^\mu \cdot D_1^\mu \tilde{x}_*$$

und schließlich, wenn wir zu u übergehen,

$$u(t_0, t_1) = e^{a(t_0 - t_*)} \cdot \tilde{x}_*\big(t_1 + b(t_0 - t_*)\big).$$

2. Wir befassen uns jetzt mit der hyperbolischen Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a(x, y),$$

in unserer Schreibweise

$$D_0 \xi_1 = \xi_2, \qquad D_0 \xi_2 = D_1 \xi_3 + a(t_0, t_1), \qquad D_0 \xi_3 = D_1 \xi_2.$$

Sie ist verschärft lokal Lipschitzsch (vgl. § 4, Beispiel 4). Die zugehörige gewöhnliche Gleichung lautet

$$\tilde{\xi}_1' = \tilde{\xi}_2, \qquad \tilde{\xi}_2' = D_1 \tilde{\xi}_3 + a_{t_0}, \qquad \tilde{\xi}_3' = D_1 \tilde{\xi}_2$$

oder $(\tilde{\xi}_\varrho')_{1 \le \varrho \le 3} = A \cdot (\tilde{\xi}_\varrho)_{1 \le \varrho \le 3} + \mathfrak{b}(t_0)$, wobei A die stetige homogene lineare Abbildung $(\tilde{\xi}_\varrho)_{1 \le \varrho \le 3} \to (\tilde{\xi}_2, D_1 \tilde{\xi}_3, D_1 \tilde{\xi}_2)$, $\mathfrak{b}(t_0)$ die Funktion $t_1 \to (0, a(t_0, t_1), 0)$ bedeuten (vgl. § 1, Beispiel 2). Wir setzen die Lösung $\tilde{\mathfrak{u}}$ der homogenen Gleichung in der Form $t_0 \to C(t_0, t_*) \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_*$ an, wo wiederum $C(t_0, t_*)$ die Resolvente der linearen Gleichung ist. Wie bekannt, läßt sich $C(t_0, t_*)$ in der Gestalt $\exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big)$, also $\tilde{\mathfrak{u}}(t_0)$ in der Gestalt $\exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big) \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_* = \sum_{n \in \mathbf{N}} (A^n \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_*) \frac{(t_0 - t_*)^n}{n!}$ schreiben. Die Berechnung ergibt

$$A^{2n} \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_* = (D_1^{2n-1} \tilde{\xi}_{*3}, D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*2}, D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*3}) \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$A^{2n+1} \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_* = (D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*2}, D_1^{2n+1} \tilde{\xi}_{*3}, D_1^{2n+1} \tilde{\xi}_{*2}) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Beschränken wir uns auf die allein interessierende erste Komponente und bezeichnen ihren Wert für den Punkt (t_0, t_1) (ohne Verwechslungen befürchten zu müssen) mit $u(t_0, t_1)$, so kommt unter Beachtung von $\tilde{\xi}_{*2} = D_1 \tilde{\xi}_{*1}$ schließlich

$$u(t_0, t_1) = \sum_{n \in \mathbf{N}} D_1^{2n} \cdot \tilde{\xi}_{*1}(t_1) \cdot \frac{(t_0 - t_*)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbf{N}} D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*2}(t_1) \frac{(t_0 - t_*)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\tilde{\xi}_{*1}(t_1 + (t_0 - t_*)) + \tilde{\xi}_{*1}(t_1 - (t_0 - t_*)) \right) + \frac{1}{2} \int_{t_1 - (t_0 - t_*)}^{t_1 + (t_0 - t_*)} \tilde{\xi}_{*2}(\tau)\, d\tau .$$

§ 6. Beziehungen zum Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI

Im Falle $E = \mathbf{R}^n$ zerfällt die partielle Differentialgleichung

$$D_0 \mathsf{x} = \mathsf{f}(t_0, \ldots, t_p, \mathsf{x}, D_1 \mathsf{x}, \ldots, D_p \mathsf{x})$$

in ein endliches Normalsystem

$$D_0 \xi_\varrho = f_\varrho\left(t_0, \ldots, t_p, (\xi_\sigma)_{1 \le \sigma \le n}, (D_1 \xi_\sigma)_{1 \le \sigma \le n}, \ldots, (D_p \xi_\sigma)_{1 \le \sigma \le n}\right) \quad (1 \le \varrho \le n)$$

von skalaren partiellen Differentialgleichungen, das man unter geeigneten Voraussetzungen nach dem CAUCHY-KOWALEWSKIschen Verfahren (vgl. [2] und [5]) lösen kann. Diese bestehen wesentlich in der Holomorphie der rechten Seiten des obigen Gleichungssystems und der Anfangswerte, während für die Anwendung unseres Verfahrens die rechten Seiten einer verschärften LIPSCHITZ-Bedingung genügen und die Anfangswerte unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt sein müssen. Dies bedeutet zwar ebenfalls die Holomorphie der Anfangswerte und (in gewissem Sinne) der rechten Seiten des Gleichungssystems, noch dazu mit einer sehr einschneidenden Wachstumsbeschränkung der Koeffizienten der Potenzreihen, aber nur hinsichtlich der Variablen $t_1, \ldots, t_p$; bezüglich t_0 genügt es, Regelfunktionen vorauszusetzen.

Die unterschiedlichen Hypothesen bewirken naturgemäß unterschiedliche Eigenschaften der Lösungen. Der Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI garantiert von vornherein die Existenz einer holomorphen Lösung bezüglich aller Variablen $t_0, \ldots, t_p$, während der Hauptsatz dieser Arbeit die Holomorphie, genauer sogar die unbeschränkte Differenzierbarkeit und Ableitungsbeschränktheit bezüglich der Variablen $t_1, \ldots, t_p$, hinsichtlich der Variablen t_0 jedoch nur die Differenzierbarkeit auf dem Komplement einer abzählbaren Menge (Stammfunktion einer Regelfunktion) sicherstellt. Trotz der etwa bezüglich t_0 auftretenden Knickstellen bleibt dabei in bemerkenswerter Weise die Eindeutigkeit — solange es sich um starke Lösungen handelt — gewährleistet. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß nach CAUCHY-KOWALEWSKI die Existenz der Lösung nur in einer Umgebung eines Punktes $(t_0, \ldots, t_p)$ nachgewiesen wird, während die Lösung nach unserem Verfahren auf der gesamten Breite Q eines p-dimensionalen Intervalls in einer Umgebung des Anfangspunktes t_* erklärt werden kann.

Beispiele. 1. Die rechte Seite der Gleichung

$$D_0 x = |t_0| \cdot t_1$$

ist eine in R^4 erklärte, verschärft LIPSCHITZsche, jedoch nicht holomorphe Funktion $(t_0, t_1, x_0, x_1) \to |t_0| \cdot t_1$ mit Werten in R. Während der Existenzbeweis von CAUCHY-KOWALEWSKI versagt, liefert unser Satz als Lösung die im Punkt t_* in $\tilde{x}_*$ übergehende Funktion

$$(t_0, t_1) \to \tfrac{1}{2}(t_0|t_0| - t_*|t_*|) \cdot t_1 + \tilde{x}_*(t_1),$$

die allerdings nur bezüglich t_1 holomorph ist.

2. Die rechte Seite der Gleichung

$$D_0 x = t_0 (1 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine in $\mathsf{R} \times]-1, 1[\times \mathsf{R}^2$ erklärte holomorphe Funktion

$$(t_0, t_1, x_0, x_1) \to t_0 (1 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

mit Werten in R, die wegen

$$\left|(D^n)_0^{t_1} (1 - t_1)^{\frac{1}{2}}\right| \geqq (n-1)!\, 2^n \qquad (n \geqq 1)$$

in keinem Punkte von der Form $(t_0, 0, x_0, x_1)$ enthaltenden Teil von $\mathsf{R} \times]-1, 1[\times \mathsf{R}^2$ verschärft lokal Lipschitzsch ist. Während unser Existenzbeweis versagt, liefert der CAUCHY-KOWALEWSKIsche Satz als Lösung die im Punkt t_* in $\tilde{x}_*$ übergehende holomorphe Funktion

$$(t_0, t_1) \to \tfrac{1}{2}(t_0^2 - t_*^2) \cdot (1 - t_1)^{\frac{1}{2}} + \tilde{x}_*(t_1).$$

3. Die rechte Seite der Gleichung

$$D_0 x = t_0 t_1$$

ist eine in R^4 erklärte holomorphe, verschärft LIPSCHITZsche Funktion $(t_0, t_1, x_0, x_1) \to t_0 t_1$ mit Werten in R. Sowohl der CAUCHY-KOWALEWSKIsche als auch unser Satz liefern als Lösung die im Punkt t_* in $\tilde{x}_*$ übergehende holomorphe Funktion

$$(t_0, t_1) \to \tfrac{1}{2}(t_0^2 - t_*^2) \cdot t_1 + \tilde{x}_*(t_1),$$

falls $\tilde{x}_*$ holomorph (bei CAUCHY-KOWALEWSKI) bzw. unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt (bei uns) ist.

Literatur

[1] WAŻEWSKI, T.: Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **43** (1938). — [2] GOURSAT, E.: Cours d'analyse mathématique, tome II, p. 360. Paris 1942. — [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, chap. IX, X. Paris 1948 bzw. 1949. — [4] BOURBAKI, N.: Fonctions d'une variable réelle, chap. IV. Paris 1951. — [5] SAUER, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 10. Februar 1956)

PETERSEN, G. M.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 494—496 (1956)

Inclusion between limitation methods

By

GORDON M. PETERSEN

We shall write $B > A$ when B is a limitation method that is strictly stronger than A, that is B limits all bounded sequences that are A limitable and also limits at least one bounded sequence that is not A limitable. Our purpose in this note is to show that if a regular matrix $B = (b_{m\,n})$ is strictly stronger than a regular matrix method $A = (a_{m\,n})$, then there exists a regular matrix $C = (c_{m\,n})$ such that B is strictly stronger than C and C is strictly stronger than A, i.e. $B > C > A$.

By a submethod of a regular matrix, $A = (a_{m\,n})$, we mean the regular matrix formed by using any infinite set of rows taken from the original matrix. It is evident, for example, that any bounded sequence that is not A limitable, is limited by at least one of its submethods.

The result we have stated was originally obtained with a different proof by BRUDNO [1]. Similar methods of constructing certain B limitable bounded sequences were developed by AGNEW [2] and ZELLER [3]. Submethods of a regular matrix limitation method have been studied in [4].

This result can not be generalized to state that if B is stronger than A and limits at least one sequence that is not A limitable, then there is a matrix C such that B is stronger than C and limits a non C limitable sequence and C is stronger than A and limits a non A limitable sequence. The author has shown [5], that the limitation methods described by

$$t_n = 2s_{n-1} - s_n$$

and

$$\tau_n = 4s_{n-2} - 4s_{n-1} + s_n$$

limit only sequences of the form $C_1 \cdot 2^n + s'_n$ and $C_2 \cdot n \cdot 2^n + C_3 \cdot 2^n + s''_n$ respectively where C_1, C_2, and C_3 are arbitrary constants and $\{s'_n\}$ and $\{s''_n\}$ are arbitrary convergent sequences. Clearly there is no matrix $C = (c_{m\,n})$ that satisfies the conditions listed above.

We first prove a lemma.

LEMMA. *If B is strictly stronger than A, then there is a submethod of A that limits some, but not all, of the bounded sequences that are B limitable.*

PROOF. Suppose that the A and B transforms are given by

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{m\,n} s_n \quad \text{and} \quad \tau_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_{m\,n} s_n.$$

We can assume that the bounded sequence $\{s_n^1\}$ which is B limitable but not A limitable is limited by B to 0 and that $\limsup t_m^1 = u$ and $\liminf t_m^1 = 1$. Let $\sup_n |s_n| = H$ and $\sup_m \sum_{n=1}^{\infty} |b_{m\,n}|\,|s_n| = M$.

We shall consider the partial sums $\{u_k\}$ of the series $1-1+0+\cdots+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+\cdots+0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0+\cdots+0+\cdots+1/n+\cdots+1/n+0+\cdots+0-1/n-\cdots-1/n+0+\cdots+0+\cdots$ where $1/n$ appears in the series $2n$ times, the first n times with the plus sign followed by $g(n)$ 0's; the second n times with the minus sign followed by $h(n)$ 0's, $g(n)$ and $h(n)$ being integral valued functions of n. It is evident that $0 \leqq u_k \leqq 1$ for every k and if $\eta_k = |u_{k+1} - u_k|$, then $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$.

Since A and B are regular, there is a sequence $\{m_k\}$ and two non decreasing functions $\lambda(m)$ and $\varkappa(m)$ such that

$$\sum_{n=1}^{\lambda(m)} |a_{m\,n}| < \varepsilon_m, \quad \sum_{n=1}^{\lambda(m)} |b_{m\,n}| < \varepsilon_m, \quad \sum_{n=\varkappa(m)}^{\infty} |a_{m\,n}| < \varepsilon_m, \quad \sum_{n=\varkappa(m)}^{\infty} |b_{m\,n}| < \varepsilon_m$$

where $\lambda(m_k) = \varkappa(m_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots$ and $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$. If necessary, we may take $\lambda(m)$ so that $\lambda(m+1) - \lambda(m) \leqq 1$ for every m. Since $B - \lim s_n^1 = 0$, it is evident that if $\gamma_m = \left| \sum_{\lambda(m)}^{\varkappa(m)} b_{m\,n} s_n^1 \right|$, then $\lim_{m\to\infty} \gamma_m = 0$.

We now define the sequence $\{s_n^2\}$. Let $s_n^2 = s_n^1$ for $n \leqq \lambda(m_1)$ and let $s_n^2 = u_k\, s_n^1$ whenever $\lambda(m_k) < n \leqq \varkappa(m_k)$. It is clear that $\{s_n^2\}$ depends on the choice of $g(n)$ and $h(n)$; in any case we shall now show that $B - \lim s_n^2 = 0$.

Suppose that $m_k < \mu \leqq m_{k+1}$,

$$\tau_\mu^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_{\mu\,n} s_n^2 = \sum_{n=1}^{\lambda(\mu)-1} b_{\mu\,n} s_n^2 + u_k \sum_{n=\lambda(\mu)}^{\varkappa(\mu)} b_{\mu\,n} s_n^1 + (u_{k+1} - u_k) \sum_{n=\varkappa(m_k)}^{\varkappa(\mu)} b_{\mu\,n} s_n^1 + \sum_{n=\varkappa(\mu)+1}^{\infty} b_{\mu\,n} s_n^2,$$

since $\varkappa(\mu) \leqq \varkappa(m_{k+1})$ and $\lambda(m_k) \leqq \lambda(\mu) \leqq \varkappa(m_k)$. It follows that

$$|\tau_\mu^2| \leqq \sum_{n=1}^{\lambda(\mu)-1} |b_{\mu\,n}|\,|s_n^2| + |u_k| \left| \sum_{n=\lambda(\mu)}^{\varkappa(\mu)} b_{\mu\,n} s_n^1 \right| + |u_{k+1} - u_k| \sum_{n=\varkappa(m_k)}^{\varkappa(\mu)} |b_{\mu\,n}|\,|s_n^1| + \sum_{n=\varkappa(\mu)+1}^{\infty} |b_{\mu\,n}|\,|s_n^2|,$$

$$\leqq H\,\varepsilon_\mu + \gamma_\mu + M\,\eta_k + H\,\varepsilon_\mu,$$

so that $B - \lim s_n^2 = 0$.

On the other hand, let the sequences $\{m_i\}$ and $\{m_j\}$, $t_{m_i} = t_\iota$, $t_{m_j} = t_j$, have the property $\lim_{i\to\infty} t_i^1 = u$ and $\lim_{j\to\infty} t_j^1 = 1$. Clearly we can choose $g(n)$ and $h(n)$ so that

$$s_n^2 = s_n^1 \quad \text{for all} \quad \lambda(m_i) < n \leqq \varkappa(m_i),$$

$$s_n^2 = s_n^1 \quad \text{for all} \quad \lambda(m_j) < n \leqq \varkappa(m_j),$$

over infinite sets of i and j, $\{\bar{\bar{i}}\}$ and $\{\bar{\bar{j}}\}$:

$$s_n^2 = 0 \quad \text{for all} \quad \lambda(m_i) < n \leqq \varkappa(m_i),$$
$$s_n^2 = 0 \quad \text{for all} \quad \lambda(m_j) < n \leqq \varkappa(m_j)$$

over infinite sets of i and j, $\{\bar{i}\}$ and $\{\bar{j}\}$.

This choice means that either $\lim t_{\bar{i}}^2 \neq \lim t_{\bar{\bar{i}}}^2$ or $\lim t_{\bar{j}}^2 \neq \lim t_{\bar{\bar{j}}}^2$ so that $\{s_n^2\}$ is not A limitable. However a submethod A' consisting of infinitely many $t_{\bar{i}}$ and $t_{\bar{j}}$ will limit $\{s_n^2\}$ to 0; it will not limit $\{s_n^1\}$ since $\lim t_{\bar{i}}^1 \neq \lim t_{\bar{j}}^1$.

We are now able to prove our theorem.

THEOREM. *If $B > A$, there is a C, such that $B > C > A$.*

PROOF. We define our new matrix $C = (c_{mn})$ by intertwining alternately the rows of A' as described in the lemma and B. The matrix C is the required matrix, it limits all A limitable sequences (because A and B are compatible, see BRUDNO [1]) and does not limit any sequences that are not B limitable; it limits $\{s_n^2\}$ to 0 and so is stronger than A, but it does not limit $\{s_n^1\}$ and so is weaker than B.

References

[1] BRUDNO, A.: Summation of Bounded Sequences by Matrices. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. **16**, (58) 191—243 (1945) (in Russian, English summary). — [2] AGNEW, R. P.: Convergence fields of methods of summability. Annals of Math. **46**, 93—101 (1945). — [3] ZELLER, K.: Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. Math. Z. **56**, 134—151 (1952). — [4] GOFFMAN, CASPER and G. M. PETERSEN: Submethods of Regular Matrix Summability Methods. Canad. J. Math. **8**, 40—46 (1956). — [5] PETERSEN, G. M.: A Note on Divergent Series. Canad. J. Math. **4**, 445—454 (1952). — [6] MAZUR, S., and W. ORLICZ: Sur les methodes linéaires de sommation. C. R. Acad. Sci. Paris **196**, 32—34 (1933). — [7] MAZUR, S., and W. ORLICZ: On linear methods of summability. Studia Math. **14**, 129—160 (1955).

University College, Swansea, Wales (England)

(Eingegangen am 22. Februar 1956)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXXII. Band:

Gruppentheorie

Von Dr. **W. Specht,** o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. VII, 457 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 66.—; Ganzleinen DM 69.60

Inhaltsübersicht: **I. Einführung.** Die Grundlagen. — Die Untergruppen einer Gruppe. — Homomorphie und Isomorphie. — Gruppen mit Operatoren. — **II. Freie und direkte Zerlegung.** Die freien Gruppen. — Freie Zerlegungen. — Direkte Zerlegung. — Theorie der abelschen Gruppen. — **III. Allgemeine Strukturtheorie.** Theorie der Normalfolgen. — Theorie der $\mathfrak{p}$-Gruppen. — Erweiterungstheorie. — Bemerkungen und Hinweise. — Namen- und Sachverzeichnis.

LXXXIII. Band:

Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet

Von Professor Dr. **Ludwig Bieberbach,** Berlin. Mit 9 Abbildungen. VIII, 281 Seiten Gr.-8°. 1956. DM 29.80; Ganzleinen DM 32.80

Inhaltsübersicht: **Einleitung:** Fragestellung. Beispiele. Existenz und Unität der Lösungen. — **Existenzsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen:** Näherungspolygone. Konvergenz von Folgen von Näherungspolygonen. Verallgemeinerung auf Systeme. Beispiele zum Existenzsatz. Die Gesamtheit der Lösungen durch einen Punkt. Die Integrale als Funktionen der Anfangsbedingungen und von Parametern. Anmerkungen und Zusätze. — **Berechnung der Lösungen:** Numerische Verfahren. Elementare Integrationsmethoden. — **Stationäre und nahezu stationäre Differentialgleichungen:** Einleitung. Stationäre lineare Differentialgleichungen. Die Dominanz der Linearglieder. Geschlossene Lösungen. Nahezu stationäre Differentialgleichungen. — **Randwertaufgaben:** Lineare Resonanz. Das Duffingsche Schwingungsproblem. Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Weiteres über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — **Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:** Lineare partielle Differentialgleichungen. Geometrische Deutung. Lineare Differentialgleichungen ohne Integrale. Die allgemeine partielle Differentialgleichung. Vollständige Integrale. Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen mit einer unbekannten Funktion. Weiteres über vollständige Integrale. Einige Beispiele. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Handbuch der Physik
Encyclopedia of Physics

Herausgegeben von **S. Flügge**, Marburg, Deutschland. 54 Bände. Mit Beiträgen in deutscher, englischer und französischer Sprache. Jeder Band ist einzeln käuflich.

Im April 1956 erschien:

Band I:

Mathematische Methoden I · Mathematical Methods I

Mit 37 Figuren. VII, 364 Seiten Gr.-8°. 1956. Ganzleinen DM 72.—

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches

Subskriptionspreis Ganzleinen DM 57.60

Inhaltsübersicht: **Grundbegriffe der klassischen Analysis, gewöhnliche Differentialgleichungen, Funktionentheorie.** Von J. Lense, München, Deutschland. — **Partielle Differentialgleichungen.** Von J. Lense, München, Deutschland. — **Elliptische Funktionen und Integrale.** Von J. Lense, München, Deutschland. — **Spezielle Funktionen der mathematischen Physik.** Von J. Meixner, Aachen, Deutschland. — **Randwertprobleme.** Von F. Schlögl, Köln, Deutschland. — Sachverzeichnis (Deutsch—Englisch); Subject Index (English—German).

Im November 1955 erschien:

Band II:

Mathematische Methoden II · Mathematical Methods II

Mit 98 Figuren. VII, 520 Seiten Gr.-8°. 1955. Ganzleinen DM 88.—

Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches

Subskriptionspreis Ganzleinen DM 70.40

Inhaltsübersicht: **Algebra.** Von G. Falk, Aachen, Deutschland. — **Geometrie.** Von H. Tietz, Braunschweig, Deutschland. — **Functional Analysis.** By I. N. Sneddon, Stoke on Trent, Great Britain. — **Numerische und graphische Methoden.** Von L. Collatz, Hamburg, Deutschland. — **Moderne Rechenmaschinen.** Von H. Bückner, Schenectady, N.Y., USA. — Sachverzeichnis (Deutsch—Englisch); Subject Index (English—German).

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, und ein Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würz[illegible]
Printed in Germany